秘密★启用前　【考试时间：6 月 28 日 15：00~17：00】

2022~2023 学年高二年级下学期期末模拟测试
数　学

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分. 第Ⅰ卷第 1 页至第 2 页，第Ⅱ卷第 3 页至第 4 页. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分 150 分，考试用时 120 分钟.

第Ⅰ卷（选择题，共 60 分）

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.
2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid -1<x<4\}$，$B=\left\{x\left|-\frac{1}{3}\leqslant 2x-1\leqslant 9\right.\right\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{x\mid -1<x\leqslant 5\}$　　C. $\left\{x\left|\frac{1}{3}\leqslant x<4\right.\right\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

2. 若 $z(1-\mathrm{i})=3+\mathrm{i}$，则 $z-\bar{z}=$

A. 4　　B. 4i　　C. −4i　　D. 2i

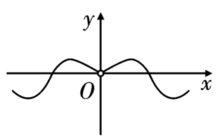
3. 某研究性学习小组对春季昼夜温差大小与某花卉种子发芽多少之间的关系进行研究，据统计得出了昼夜温差 x(℃)与实验室种子浸泡后的发芽数 y(颗)之间的线性回归方程：$y=2.1x+\hat{a}$，且对应数据如表：

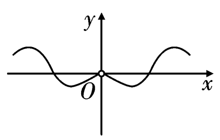
温差 x(℃)	1	2	3	4	5
发芽数 y/颗	3	7	8	10	12

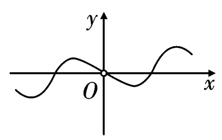
如果昼夜温差为 10℃时，那么种子的发芽数大约是

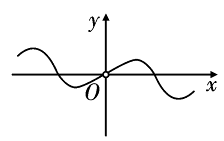
A. 21 颗　　B. 23 颗　　C. 25 颗　　D. 27 颗

4. 函数 $y=\sin x\cdot\ln\frac{x^2+2}{x^2}$的图象可能是


A


B


C


D

5. 南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法》中出现了如图 1 所示的形状，后人称之为“三角垛”. 其最上层有 1 个球，第二层有 3 个球，第三层有 6 个球，第四层 10 个…，则第八层球的个数为

A. 15
B. 21
C. 28
D. 36

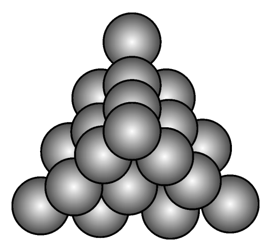


图 1

6. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$，则将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象，$g(x)$ 图象关于原点对称，则

A. $\varphi=\frac{\pi}{12}$　　B. $\varphi=\frac{\pi}{6}$　　C. $\varphi=\frac{\pi}{3}$　　D. $\varphi=\frac{5\pi}{12}$

7. 学生到工厂劳动实践，利用 3D 打印机技术制作模型. 设模型为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O-EFGH$ 所得的几何体(如图 2)，其中 O 为长方体的中心，E，F，G，H 分别为所在棱的中点，$AB=BC=12\text{cm}$，$AA_1=6\text{cm}$，3D 打印所用的原料密度为 0.5g/cm^3，不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量是

A. 324g
B. 360g
C. 396g
D. 432g

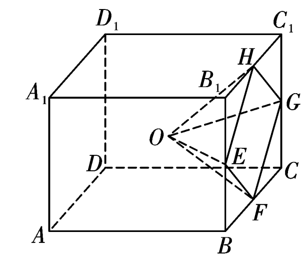


图 2

8. 过抛物线 C：$x^2=4y$ 的焦点 F 且倾斜角为锐角的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，过线段 AB 的中点 N 且垂直于 l 的直线与 C 的准线交于点 M，若 $|MN|=|AB|$，则 l 的斜率为

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. 1　　D. 2

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

9. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 满足 $3\vec{a}-2\vec{b}=(2,6)$，$\vec{a}+2\vec{b}=(6,2)$，$\vec{c}=(1,1)$，设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 θ，则

A. $|\vec{a}|=\sqrt{2}|\vec{b}|$　　B. $\vec{a}\parallel\vec{c}$　　C. $\theta=45°$　　D. $\vec{b}\perp\vec{c}$

10. 近年来，加强青少年体育锻炼，重视体质健康已经在社会形成高度共识，某校为了了解学生的身体素质状况，举行了一场身体素质体能测试，以便对体能不达标的学生进行有效地训练，促进他们体能的提升，现从全部测试成绩中随机抽取 200 名学生的测试成绩，进行适当分组后，画出如图 3 所示频率分布直方图，则

A. $a=0.020$
B. 在被抽取的学生中，成绩在区间[80，100]内的学生有 70 人
C. 估计全校学生体能测试成绩的平均数为 77
D. 估计全校学生体能测试成绩的 69%分位数为 84

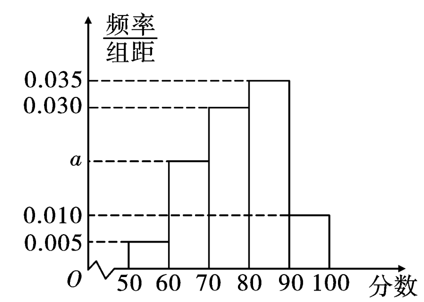


图 3

11. 已知 $x^{-\frac{1}{4}}>y^{-\frac{1}{4}}$，则下列不等式成立的是

A. $x^y>y^x$　　B. $\left(\frac{1}{9}\right)^x>\left(\frac{1}{9}\right)^y$

C. $\log_2\frac{1}{x^2+1}>\log_2\frac{1}{y^2+1}$　　D. $y^2+\frac{2}{x(y-x)}\geqslant 4\sqrt{2}$

12. 已知函数 $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$ 的导函数为 $f'(x)$，则

A. 函数 $f(x)$ 的极小值为$-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$
B. $f'(-2)=0$
C. 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为$(-2,+\infty)$
D. 若函数 $g(x)=f(x)-a$ 有两个不同的零点，则 $a\in\left(-\frac{1}{\mathrm{e}^2},0\right)$

第Ⅱ卷（非选择题，共 90 分）

注意事项：

第Ⅱ卷用黑色碳素笔在答题卡上各题的答题区域内作答，在试题卷上作答无效.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 古希腊毕达哥拉斯学派在公元前 6 世纪研究过正五边形和正十边形的作图，发现了黄金分割值约为 0.618，这一数值也可以表示为 $a=2\cos72°$，则 $\dfrac{a\sin72°}{\sqrt{2-a}}=$________.

14. 已知 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)(ax+1)^5$ 的展开式的所有项的系数的和为 64，则展开式中含 x^3 的项的系数为________.（用数字作答）

15. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-c,0)$，上顶点为 B，直线 l 过 F 和 B，且与圆 O：$x^2+y^2=r^2(r>c)$ 交于 M，N 两点，若 $|MN|=\sqrt{3}r$，$|FN|=\dfrac{\sqrt{3}r}{3}$，则椭圆 C 的离心率为________.

16. 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 2，将其绕着 BC 边旋转角度 θ，使点 A 旋转到 A' 位置. 记四面体 $A'ABC$ 的内切球半径和外接球半径依次为 r，R，当四面体 $A'ABC$ 的表面积最大时，$A'A=$________；$\dfrac{R}{r}=$________.（第一空 2 分，第二空 3 分）

四、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

已知在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对应的边分别为 a，b，c. 在下列三个条件：

①$\vec{m}=\left(\sin A,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\vec{n}=(2\cos2A,2\cos A)$，且 $\vec{m}/\!/\vec{n}$；

②$2ac\sin B=\sqrt{3}(b^2+c^2-a^2)$；

③$\cos^2B+\cos^2C=\cos^2A+1-\sin B\sin C$ 中任选一个，回答下列问题.（若选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分）

（Ⅰ）求角 A；

（Ⅱ）若 $S_{\triangle ABC}=6\sqrt{3}$，$BC=6$，求 $\triangle ABC$ 内切圆的半径.

18.（本小题满分 12 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_n=2a_n-n+1$.

（Ⅰ）证明：数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列；

（Ⅱ）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_2$，$b_{n+1}=\begin{cases}a_n, & n\text{ 为奇数},\\ a_n-b_n, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 求数列 $\{b_n\}$ 的前 20 项的和.

19.（本小题满分 12 分）

在如图 4 所示的圆锥中，P 为顶点，在底面圆周上取 A、B、C 三点，使得 $AC=4$，$BC=2$，在母线 PA 上取一点 D，过 D 作一个平行于底面的平面，分别交 PB、PC 于点 E、F，且 $EF=1$，$DE=\sqrt{5}$.

（Ⅰ）求证：平面 $ABD\perp$ 平面 ABC；

（Ⅱ）已知三棱锥 $F-BCD$ 的体积为 2，求平面 EBD 与平面 BDF 所夹锐角的余弦值.

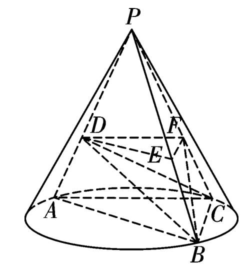


图 4

20.（本小题满分 12 分）

某县城为活跃经济，特举办传统文化民俗节，小张弄了一个套小白兔的摊位，设 x_i 表示第 i 天的平均气温，y_i 表示第 i 天参与活动的人数，$i=1,2,\cdots,20$，根据统计，计算得到如下一些统计量的值：$\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=80$，$\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2=9000$，$\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=800$.

（Ⅰ）根据所给数据，用相关系数 r（精确到 0.01）判断是否可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系；

（Ⅱ）现有两个家庭参与套圈，A 家庭 3 位成员每轮每人套住小白兔的概率都为 $\dfrac{3}{10}$，B 家庭 3 位成员每轮每人套住小白兔的概率分别为 $\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{6}$，每个家庭的 3 位成员均玩一次套圈为一轮，每轮每人收费 30 元，每个小白兔价值 60 元，且每人是否套住相互独立，以每个家庭的盈利的期望为决策依据，问：一轮结束后，哪个家庭损失较大？

附：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$.

21.（本小题满分 12 分）

设双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦距为 6，点 $(5,4)$ 在双曲线 C 上.

（Ⅰ）求双曲线 C 的方程；

（Ⅱ）已知 C 的右焦点为 F，M 是直线 $x=\dfrac{a^2}{3}$ 上一点，直线 MF 交双曲线 C 于 A，B 两点（A 在第一象限），过点 M 作直线 OA 的平行线 l，l 与直线 OB 交于点 P，与 x 轴交于点 Q，证明：P 为线段 MQ 的中点.

22.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=e^x-1-(a+1)x$.

（Ⅰ）若 $x\geqslant0$，$f(x)\geqslant0$，求 a 的取值范围；

（Ⅱ）若 $x>0$ 且 $m\geqslant1$，证明：$f(x)>\dfrac{x^2}{\ln(x+m)}-(a+1)x$.