高三数学考试参考答案(理科)

1. B 【解析】本题考查集合的补集,考查数学运算的核心素养.

由题意可得 $A=\{x|x<-2$ 或 $x>3\}$,则 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$.

2. A 【解析】本题考查复数的运算,考查数学运算的核心素养.

因为 $z=\frac{3-\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\frac{(3-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=1+\mathrm{i}$,所以复数 z 在复平面内对应的点位于第一象限.

3. C 【解析】本题考查二项式定理,考查数学运算的核心素养.

$(\frac{1}{x}-2)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r\cdot(\frac{1}{x})^{5-r}\cdot(-2)^r=(-2)^r\cdot C_5^r\cdot x^{r-5}$. 令 $r-5=-2$,得 $r=3$,则 $T_4=(-2)^3\times C_5^3=-80$.

4. A 【解析】本题考查函数的奇偶性,考查数学抽象的核心素养.

由题意可得 $f(x+1)=2(x+1)^2+a(x+1)+2=2x^2+(a+4)x+a+4$. 因为 $f(x+1)$ 是偶函数,所以 $a+4=0$,解得 $a=-4$.

5. D 【解析】本题考查抽样方法,考查数据分析的核心素养.

由题意可知得到的样本编号依次为 12,06,01,16,19,10,07,11,39,38,则得到的第 8 个样本编号是 11.

6. B 【解析】本题考查等比数列的性质,考查数学运算的核心素养.

因为 $a_1+a_3=2$,$a_5+a_7=18$,所以 $q^4=\frac{a_5+a_7}{a_1+a_3}=9$,解得 $q^2=3$,则 $a_3+a_5=(a_1+a_3)q^2=6$.

7. C 【解析】本题考查函数的奇偶性,考查逻辑推理的核心素养.

由题意可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,$f(1)=3$,且 $f(x)>0$,则不等式 $x[|f(x)|-3]>0$ 等价于 $\begin{cases}x>0,\\ f(x)-3>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\ -f(x)-3<0,\end{cases}$ 解得 $x>1$ 或 $-1<x<0$.

8. A 【解析】本题考查椭圆,考查直观想象的核心素养.

设 $P(m,n)$,则 $\begin{cases}m^2+n^2=5,\\ \frac{m^2}{8}+\frac{n^2}{2}=1,\end{cases}$ 解得 $|n|=1$,故 $\triangle PAB$ 的面积是 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}\times 1=2\sqrt{2}$.

9. A 【解析】本题考查三角函数的图象与性质,考查数形结合的数学思想.

由题意可得 $f(x)=\cos 2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$. 因为 $x\in[0,\pi]$,所以 $2\omega x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},2\pi\omega+\frac{\pi}{6}]$,则 $3\pi\leqslant 2\pi\omega+\frac{\pi}{6}<4\pi$,解得 $\frac{17}{12}\leqslant\omega<\frac{23}{12}$.

10. B 【解析】本题考查等差数列与不等式,考查化归与转化的数学思想.

因为 $a_{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})a_n$,所以 $\frac{a_{n+1}}{n+2}=\frac{a_n}{n+1}$,所以数列 $\{\frac{a_n}{n+1}\}$ 是常数列,则 $\frac{a_n}{n+1}=\frac{a_3}{3+1}=1$,

从而 $a_n=n+1$，故 $S_n=\frac{n^2+3n}{2}$. 因为 $2S_n+12\geqslant ka_n$ 恒成立，所以 $n^2+3n+12\geqslant k(n+1)$ 恒成立，即 $k\leqslant\frac{n^2+3n+12}{n+1}$ 恒成立. 设 $t=n+1$，则 $n=t-1$，从而 $\frac{n^2+3n+12}{n+1}=\frac{(t-1)^2+3(t-1)+12}{t}=t+\frac{10}{t}+1$. 当 $t=3$ 时，$t+\frac{10}{t}+1=\frac{22}{3}$，当 $t=4$ 时，$t+\frac{10}{t}+1=\frac{15}{2}$. 因为 $\frac{22}{3}<\frac{15}{2}$，所以 $t+\frac{10}{t}+1$ 的最小值是 $\frac{22}{3}$，即 $k\leqslant\frac{22}{3}$.

11. C 【解析】本题考查三棱锥的外接球，考查直观想象的核心素养.

由题意可得△ABC 的外接圆的半径为 $r=\frac{BC}{2\sin\angle BAC}=4$，则球心 O 到平面 ABC 的距离 d $\sqrt{(\frac{10}{2})^2-4^2}=3$，故点 P 到平面 ABC 的最大距离 $h=8$. 因为 $BC=4\sqrt{3}$，$\angle BAC=120°$，所以 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$，即 $AB^2+AC^2+AB\cdot AC=48$，所以 $AB\cdot AC\leqslant16$，则△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC\leqslant4\sqrt{3}$，故三棱锥 $P-ABC$ 的体积的最大值是 $\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times4\sqrt{3}\times8=\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

12. D 【解析】本题考查导数的应用，考查函数与方程的数学思想.

设 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$，则 $f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant0$，从而 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故 $f(0.1)=e^{0.1}-e^{-0.1}-0.2>f(0)=0$，即 $a>c$. 设 $g(x)=2x-2\ln(1+x)$，则 $g'(x)=2-\frac{2}{x+1}=\frac{2x}{x+1}>0$. 当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(0.1)=0.2-2\ln1.1=0.2-\ln1.21>g(0)=0$，即 $c>b$. 综上，$b<c<a$.

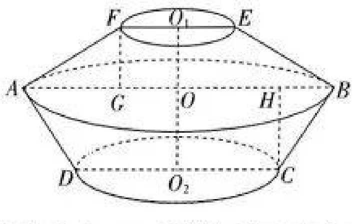
13. $-\frac{1}{4}$ 【解析】本题考查平面向量，考查数学运算的核心素养.

设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，因为 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$，所以 $4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=6$. 因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，所以 $4-4\cos\theta+1=6$，所以 $\cos\theta=-\frac{1}{4}$.

14. 8.75 【解析】本题考查随机变量的期望，考查数据分析的核心素养.

由题意可得该销售商销售每件零件获利的期望是 $10\times0.95-15\times0.05=8.75$ 元，则该销售商销售该零件 10000 件，获利的期望为 $8.75\times10000=87500$ 元，即8.75 万元.

15. $(84\sqrt{2}+64\sqrt{5})\pi$ 【解析】本题考查数学文化与立体几何，考查直观想象的核心素养.



如图，作 $FG\perp AB$，垂足为 G，作 $CH\perp AB$，垂足为 H，由题意可得 $O_1F=4$，$OA=10$，$O_2C=6$，则 $AG=6$，$BH=4$. 由题意可知 $FG:CH=3:4$，则 $FG=6$，$CH=8$，从而 $AF=6\sqrt{2}$，$BC=4\sqrt{5}$，故该汝窑

$\pi \cdot AF \cdot (O_1F+OA)+\pi \cdot BC \cdot (O_2C+OA)=(84\sqrt{2}+64\sqrt{5})\pi$ 平方厘米.

16. $3+\sqrt{7}$ **【解析】本题考查双曲线的离心率,考查直观想象的核心素养.**

由题意可知$\angle NF_1O=60°$,$\angle ONF_1=90°$,$|OF_1|=c$,则$|NF_1|=\frac{1}{2}c$. 因为$\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{NF_1}$,所以$|MN|=\frac{5}{2}c$,所以$|MF_1|=3c$,则$|MF_2|=3c-2a$. 在$\triangle MF_1F_2$中,由余弦定理可得$|MF_2|^2=|MF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|MF_1|\cdot|F_1F_2|\cos\angle MF_1F_2$,即$(3c-2a)^2=(3c)^2+(2c)^2-2\times3c\times2c\times\frac{1}{2}$,整理得$c^2-6ac+2a^2=0$,即$e^2-6e+2=0$,解得$e=3+\sqrt{7}$.

17. 解:(1)年龄在 40 周岁以上(含 40 周岁)的非"编织巧手"有 5 人,
年龄在 40 周岁以下的"编织巧手"有 6 人.
列联表如下:

	"编织巧手"	非"编织巧手"	总计
年龄≥40 岁	19	5	24
年龄<40 岁	6	10	16
总计	25	15	40

…………………………………………………………………… 3 分

由题中数据可得 $K^2=\frac{40\times(19\times10-6\times5)^2}{24\times16\times25\times15}=\frac{64}{9}\approx7.111$, ……………………… 5 分

因为 $7.111>6.635$,所以有 99% 的把握认为是否是"编织巧手"与年龄有关. ………… 6 分

(2)由题意可得这 6 人中年龄在 40 周岁以上(含 40 周岁)的有 2 人,年龄在 40 周岁以下的有 4 人. …………………………………………………………………… 7 分

从这 6 人中随机抽取 2 人的情况有 $C_6^2=15$ 种, ………………………………… 9 分

其中符合条件的情况有 $C_4^1C_2^1=8$ 种, ………………………………………… 11 分

故所求概率 $P=\frac{8}{15}$. …………………………………………………… 12 分

评分细则:
(1)在第(1)问中,直接补充完整 2×2 列联表,没有计算过程,只要答案正确,不扣分;
(2)在第(2)问中,算出 40 周岁以上(含 40 周岁)和 40 周岁以下的人数,得 2 分,求出总的基本事件和符合条件的基本事件的个数,各得 2 分;
(3)若用其他解法,参照评分标准按步骤给分.

18. 解:(1)因为 $5\cos2B-14\cos B=7$,所以 $5(2\cos^2B-1)-14\cos B-7=0$, ………… 1 分

所以 $5\cos^2B-7\cos B-6=0$,即 $(5\cos B+3)(\cos B-2)=0$, ……………………… 3 分

解得 $\cos B=-\frac{3}{5}$. ………………………………………………………… 4 分

因为 $0<B<\pi$,所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{4}{5}$. ……………………………………

(2)由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=41$，则 $b=\sqrt{41}$. ………………………… 8 分

设$\triangle ABC$ 的边 AC 上的高为 h.

因为$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bh$，所以 $h=\frac{ac\sin B}{b}=\frac{5\times2\times\frac{4}{5}}{\sqrt{41}}=\frac{8\sqrt{41}}{41}$. …… 10 分

因为 B 是钝角，所以当 $BD\perp AC$ 时，垂足在边 AC 上，即 BD 的最小值是$\frac{8\sqrt{41}}{41}$. …… 12 分

评分细则：

(1)在第(1)问中，求出 $\cos B=-\frac{3}{5}$，得 4 分，没有说明 $0<B<\pi$，不扣分；

(2)在第(2)问中，求出$\triangle ABC$ 的边 AC 上的高 $h=\frac{8\sqrt{41}}{41}$，累计得 10 分，没有说明 BD 的最小值是边 AC 上的高，直接得出 BD 的最小值为$\frac{8\sqrt{41}}{41}$，扣 1 分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

19.(1)证明：取 AD 的中点 H，连接 EH，FH.

因为 F，H 分别是棱 PA，AD 的中点，所以 $HF/\!/PD$. ………………………… 1 分

因为 $PD\subset$ 平面 PCD，$HF\not\subset$平面 PCD，所以 $HF/\!/$ 平面 PCD. ………………… 2 分

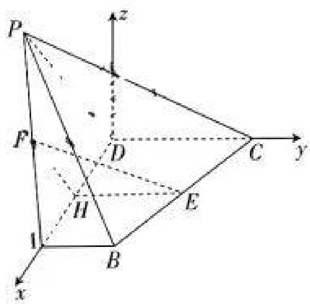
因为 E，H 分别是棱 BC，AD 的中点，所以 $HE/\!/CD$. ………………………… 3 分

因为 $CD\subset$ 平面 PCD，$HE\not\subset$ 平面 PCD，所以 $HE/\!/$ 平面 PCD. ………………… 4 分

因为 HE，$HF\subset$ 平面 HEF，且 $HE\cap HF=H$，所以平面 $HEF/\!/$ 平面 PCD. ………… 5 分

因为 $EF\subset$ 平面 HEF，所以 $EF/\!/$ 平面 PCD. ………………………………… 6 分

(2)解：以 D 为坐标原点，分别以$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$的方向为 x，y 轴的正方向，垂直平面 $ABCD$ 向上的方向为 z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $AB=1$，则 $AD=CD=PD=2$，$PC=2\sqrt{3}$.

由余弦定理可得 $\cos\angle PDC=\frac{4+4-12}{2\times2\times2}=-\frac{1}{2}$，则$\angle PDC=120^\circ$，

从而 $A(2,0,0)$，$D(0,0,0)$，$P(0,-1,\sqrt{3})$，$E(1,\frac{3}{2},0)$，$F(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

故$\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EF}=(0,-2,\frac{\sqrt{3}}{2})$. ………………………… 8 分

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}=2x=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=-y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $y=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},1)$. ………………………… 10 分

设直线 EF 与平面 PAD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{EF}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{EF}|}=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{4+\frac{3}{4}}}=\dfrac{3\sqrt{57}}{38}$,

即直线 EF 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{57}}{38}$. ………………………………… 12 分

评分细则:

(1)在第(1)问中,也可以连接 AE,并延长交 CD 于 M,连接 PM,易证 EF 是 $\triangle APM$ 的中位线,从而得到 $EF /\!/ PM$,进而证出 $EF /\!/$ 平面 PCD;来源:高三答案公众号

(2)在第(2)问中,也可以先求出 EF 的长,再通过等体积法求出点 E 到平面 PAD 的距离 d,从而求出直线 EF 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{d}{EF}$;

(3)若用其他解法,参照评分标准按步骤给分.

20. 解:(1)由题意可得 $|AB|=|BF|$,即点 B 到点 F 的距离等于点 B 到直线 l_1 的距离. …………………………………………………………………… 1 分

因为 $|EF|=4$,所以 l_1 的方程为 $x=-2$,$F(2,0)$, ………………………………… 2 分

则点 B 的轨迹 C 是以 F 为焦点,直线 $l_1: x=-2$ 为准线的抛物线, ……………………… 3 分

故点 B 的轨迹 C 的方程为 $y^2=8x$. …………………………………………………… 4 分

(2)由题意可知直线 l 的斜率不为 0,则设直线 $l: x=my+n$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases} x=my+n, \\ y^2=8x, \end{cases}$ 整理得 $y^2-8my-8n=0$.

则 $\Delta=64m^2+32n>0$,从而 $y_1+y_2=8m$,$y_1y_2=-8n$. ……………………………… 5 分

因为以线段 MN 为直径的圆恒过点 P,所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$,

即 $(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-4)(y_2-4)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+y_1y_2-4(y_1+y_2)+20=0$. ……………………………………………………………………………… 6 分

因为 $x_1=\dfrac{y_1^2}{8}$,$x_2=\dfrac{y_2^2}{8}$,所以 $\dfrac{(y_1y_2)^2}{64}-\dfrac{y_1^2+y_2^2}{4}+y_1y_2-4(y_1+y_2)+20=0$,

即 $\dfrac{(y_1y_2)^2}{64}-\dfrac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{4}+y_1y_2-4(y_1+y_2)+20=0$, …………………………… 8 分

所以 $n^2-16m^2-12n-32m+20=0$,即 $n^2-12n+36=16m^2+32m+16$,即 $(n-6)^2=16(m+1)^2$,所以 $n-6=\pm4(m+1)$,即 $n=4m+10$ 或 $n=-4m+2$. …………………………… 10 分

因为直线 l 不经过点 P,所以 $n\neq-4m+2$,则直线 $l: x=my+4m+10$ 满足题意, … 11 分

故直线 l 过定点 $(10,-4)$. ………………………………………………………………… 12 分

评分细则:

(1)在第(1)问中,也可以设 $B(x,y)$,再由 $|AB|=|BF|$,得到 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x+2|$,从而得到点 B 的轨迹 C 的方程;

(2)在第(2)问中，也可以设直线 $l:y=kx+m$，得到直线 l 过定点 $(10,-4)$，再验证当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 也过定点 $(10,-4)$，从而得出直线 l 过定点 $(10,-4)$，若直线方程用斜截式表示，没有考虑斜率不存在的情况，扣 1 分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

21. 解：(1)由题意可得 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-ax=\frac{-ax^2-ax+1}{x+1}$.
·· 1 分

令 $f'(x)=0$，则 $-ax^2-ax+1=0$，$\Delta=a^2+4a=a(a+4)$.

当 $\Delta\leqslant 0$，即 $-4\leqslant a\leqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增. ······················ 2 分

当 $\Delta>0$，即 $a>0$ 或 $a<-4$ 时，$f'(x)=0$ 有两个根 $x_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{a^2+4a}}{2a}$，$x_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{a^2+4a}}{2a}$.

若 $a>0$，$x_1<-1$，$x_2>0$，则当 $x\in(-1,x_2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，
当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减； ·································· 3 分

若 $a<-4$，$x_1>x_2\in(-1,+\infty)$，则当 $x\in(-1,x_2)$ 或 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_2,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. ································· 4 分

综上，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,x_2)$ 上单调递增，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减；当 $-4\leqslant a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；当 $a<-4$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,x_2)$ 和 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增，在 (x_2,x_1) 上单调递减. ·································· 5 分

(2)对任意的 $x\in[0,+\infty)$，都有 $f'(x)\geqslant g(x)$ 等价于对任意的 $x\in[0,+\infty)$，都有 $2axe^x-\sin x\geqslant 0$. 设 $h(x)=2axe^x-\sin x$，则 $h'(x)=2a(x+1)e^x-\cos x$. ······················ 6 分

若 $a<0$，当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$\cos x\in[0,1]$，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，

所以 $h(x)\leqslant h(0)=0$，不等式 $2axe^x-\sin x\geqslant 0$ 不恒成立，即 $a<0$ 不符合题意. ········ 7 分

当 $a>0$ 时，设 $m(x)=h'(x)=2a(x+1)e^x-\cos x$，则 $m'(x)=2a(x+2)e^x+\sin x$，

当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\sin x\geqslant 0$，所以 $m'(x)>0$，则 $m(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，即 $h'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，且 $h'(0)=2a-1$. ·· 8 分

若 $0<a<\frac{1}{2}$，则 $h'(0)=2a-1<0$，$h'(\frac{\pi}{2})=2a(\frac{\pi}{2}+1)e^{\frac{\pi}{2}}>0$，则存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $h'(x_0)=0$. 当 $x\in[0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上单调递减，则 $h(x)\leqslant h(0)=0$，不等式 $2axe^x-\sin x\geqslant 0$ 不恒成立，即 $0<a<\frac{1}{2}$ 不符合题意. ······························ 9 分

若 $a\geqslant\frac{1}{2}$，则 $h'(0)=2a-1\geqslant 0$，$h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，故 $h(x)\geqslant h(0)=0$，即对任意的 $x\in[0,\pi]$，不等式 $2axe^x-\sin x\geqslant 0$ 恒成立；

当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，$h(x)=2axe^x-\sin x\geqslant 2a\pi e^{\pi}-1\geqslant\pi e^{\pi}-1>0$，即对任意的 $x\in(\pi,$

$+\infty)$，不等式 $2axe^x-\sin x\geqslant 0$ 恒成立，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 符合题意. …………………………… 11 分

综上，a 的取值范围为 $[\frac{1}{2},+\infty)$. …………………………………………………………… 12 分

评分细则：

(1)在第(1)问中，只要分类讨论情况正确，没有把最后结果写在一起，不扣分；

(2)在第(2)问中，将不等式转化为对任意的 $x\in[0,+\infty)$，都有 $2axe^x-\sin x\geqslant 0$ 并求导正确，得 1 分，讨论出 a 的取值范围，累计得 11 分，漏掉最后一步，扣 1 分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分. 来源：高三答案公众号

22. 解：(1)由 $\begin{cases}x=2+4\cos\alpha,\\ y=4\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数)，得 $(x-2)^2+y^2=16$，即 $x^2+y^2-4x-12=0$，

则曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4x-12=0$. ………………………………………… 2 分

由 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-3=0$，得 $x-y-3=0$，

则直线 l 的普通方程为 $x-y-3=0$. …………………………………………………… 4 分

(2)由题意可得直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=-3+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数). ……………………………… 5 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程，整理得 $t^2-5\sqrt{2}t-3=0$. ………… 6 分

设 A、B、M 对应的参数分别为 t_1、t_2、t，则 $t_1+t_2=5\sqrt{2}$，$t_1t_2=-3$，从而 $t=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，…

…………………………………………………………………………………………… 8 分

故 $\frac{|PM|}{|PA|+|PB|}=\frac{\frac{t_1+t_2}{2}}{|t_1-t_2|}=\frac{t_1+t_2}{2\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}=\frac{5\sqrt{31}}{62}$. ……………………… 10 分

评分细则：

(1)在第(1)问中，曲线 C 的普通方程写成 $(x-2)^2+y^2=16$，不扣分；

(2)在第(2)问中，先求出 $|PA|+|PB|=|AB|$ 的值，再由点到直线的距离公式求出圆心 C 到直线 l 的距离 d，然后由两点之间的距离公式求出 $|CP|$ 的值，从而求出 $|PM|$ 的值，最后得到 $\frac{|PM|}{|PA|+|PB|}=\frac{|PM|}{|AB|}$ 的值；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

23. 解：(1)因为 $a=-3$，所以 $f(x)=|2x-3|$，则 $f(x)<3x$ 等价于 $|2x-3|<3x$. ……… 1 分

当 $2x-3<0$，即 $x<\frac{3}{2}$ 时，$-(2x-3)<3x$，解得 $\frac{3}{5}<x<\frac{3}{2}$；…………………………… 2 分

当 $2x-3\geqslant 0$，即 $x\geqslant\frac{3}{2}$ 时，$2x-3<3x$，解得 $x\geqslant\frac{3}{2}$. ………………………………… 3 分

综上，不等式 $f(x)<3x$ 的解集为 $(\frac{3}{5},+\infty)$. ………………………………………… 4 分

(2) $f(x)\geqslant 2-|2x+2|$ 恒成立等价于 $|2x+a|+|2x+2|\geqslant 2$. ……………………………… 5 分

因为 $|2x+a|+|2x+2|\geqslant|2x+a-(2x+2)|=|a-2|$, ………………………………… 7 分

所以 $|a-2|\geqslant 2$. ……………………………………………………………………… 8 分

解得 $a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant 4$，即 a 的取值范围为 $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$. ……………………… 10 分

评分细则：

(1)在第(1)问中，也可以将不等式 $f(x)<3x$ 等价于不等式组 $\begin{cases}x>0,\\(2x-3)^2<9x^2,\end{cases}$ 从而求出不等式的解集，只要计算正确，不扣分；

(2)在第(2)问中，最后结果没有写成集合或区间的形式，扣 1 分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.