



8. 讲桌上放有两摞书,一摞3本,另一摞4本,现要把这7本不同的书发给7个学生,每位学生一本书,每次发书只能从其中一摞取最上面的一本书,则不同取法的种数为.

A.20

B.30

C.35

D.210

9. 已知函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) - \sqrt{3}$  (其中  $\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$ ) 的图像与  $x$  轴相邻两个交点之间的最小距离为  $\frac{\pi}{6}$ , 当  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  时  $f(x)$  的图像与  $x$  轴的所有交点的横坐标之和为  $\frac{\pi}{3}$ , 则

A.  $\omega = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{\pi}{6}$

B.  $\omega = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{\pi}{3}$

C.  $\omega = 2, \varphi = \frac{\pi}{6}$

D.  $\omega = 2, \varphi = \frac{\pi}{3}$

10. 英国数学家贝叶斯在概率论研究方面成就显著, 根据贝叶斯统计理论, 随机事件  $A, B$  存在如下关系:  $P(A/B) = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}$ ; 2023 贺岁档电影精彩纷呈, 有几部影片是小明期待想去影院看的.

小明同学家附近有甲、乙两家影院, 小明第一天去甲、乙两家影院观影的概率分别为 0.4 和 0.6. 如果他第一天去甲影院, 那么第二天去甲影院的概率为 0.6; 如果第一天去乙影院, 那么第二天去甲影院的概率为 0.5, 则小明同学

A 第二天去甲影院的概率为 0.44

B 第二天去乙影院的概率为 0.44

C 第二天去了甲影院, 则第一天去乙影院的概率为  $\frac{4}{9}$

D 第二天去了乙影院, 则第一天去甲影院的概率为  $\frac{8}{23}$

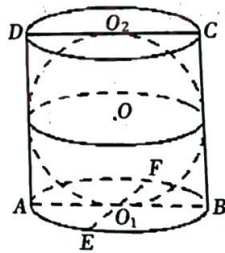
11. 传说古希腊数学家阿基米德的墓碑上刻着一个圆柱, 圆柱内有一个内切球, 这个球的直径恰好与圆柱的高相等. “圆柱容球”是阿基米德最为得意的发现; 如图是一个圆柱容球,  $O_1, O_2$  为圆柱上下底面的圆心,  $O$  为球心,  $EF$  为底面圆  $O_1$  的一条直径, 若球的半径  $r = 2$ , 则

A. 球与圆柱的表面积之比为 1:2

B. 平面  $DEF$  截得球的截面面积取值范围为  $[\frac{6\pi}{5}, 16\pi]$

C. 四面体  $CDEF$  的体积的最大值为 16

D. 若  $P$  为球面和圆柱侧面的交线上一点, 则  $PE+PF$  的取值范围  $[2+2\sqrt{5}, 4\sqrt{3}]$



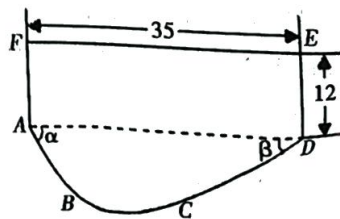
12. 某中学开展劳动实习, 学生加工制作零件, 零件的截面如图 (单位: cm) 所示, 四边形  $AFED$  为矩形,  $AB, CD, FE$  均与圆  $O$  相切,  $B, C$  为切点, 零件的截面  $BC$  段为圆  $O$  的一段弧, 已知  $\tan\alpha = \frac{4}{3}, \tan\beta = \frac{3}{4}$ , 则该零件的截面的周长为 \_\_\_\_\_ (结果保留  $\pi$ )

A.  $84+6\pi$

B.  $80+5\pi$

C.  $75+5\pi$

D.  $82+6\pi$



高三数学(理科) 试题 第2页(共4页)

第 II 卷 非选择题(共 90 分)

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13.  $(x - \frac{1}{7x})^7$  的展开式的第 2 项为\_\_\_\_\_.

14. 已知向量  $a, b$  满足,且  $|a|=3, |b|=2, \frac{a}{|a|} - \frac{b}{|b|} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ , 则  $|a-b| =$ \_\_\_\_\_.

15. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$  的左,右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_2$  且倾斜角为  $60^\circ$  的直线与双曲线右支交于  $A, B$  两点,若  $\triangle ABF_1$  为等腰三角形,则该双曲线的离心率为\_\_\_\_\_.

16. 已知正实数  $x, y$  满足  $e^x = y \ln x + y \ln y$ , 则  $\ln y - \frac{\ln x + 1}{x}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答;第 22,23 题为选考题,考生根据要求作答.

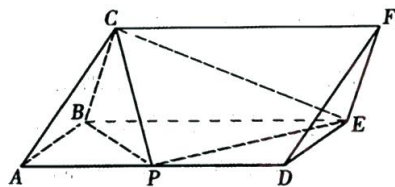
(一)必考题:共 60 分

17. (本小题满分 12 分) 已知  $S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,且  $S_n = 2^{n+1} - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $b_n = \frac{2^{n+1}}{(a_n - 1)(a_{n+1} - 1)}$ ,  $T_n$  是  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和,证明:  $T_n < \frac{4}{3}$ .

18. (本小题满分 12 分) 如图,在三棱柱  $ABC-DEF$  中,  $AD = 2AB = 4, \angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ,  $P$  为  $AD$  的中点,  $\triangle BCP$  为等边三角形,直线  $AC$  与平面  $ABED$  所成角大小为  $\frac{\pi}{4}$ .



(1) 求证:  $PE \perp$  平面  $BCP$ ;

(2) 求平面  $ECP$  与平面  $CDP$  所成锐二面角的余弦值.

19. (本小题满分 12 分) 某超市采购了一批袋装的进口牛肉干进行销售,共 1000 袋,每袋成本为 30 元,销售价格为 50 元,经过科学测定,每袋牛肉干变质的概率为  $p (0 < p < \frac{1}{10})$ ,且各袋牛肉干是否变质相互独立.依据消费者权益保护法的规定:超市出售变质食品的,消费者可以要求超市退一赔三.为了保护消费者权益,针对购买到变质牛肉干的消费者,超市除退货外,并对每袋牛肉干以销售价格的三倍现金赔付,且把变质牛肉干做废物处理,不再进行销售.

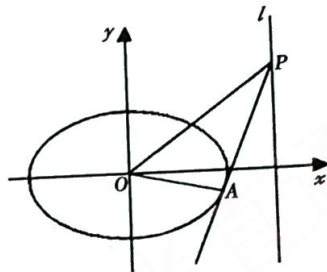
(1) 若销售完这批牛肉干后得到的利润为  $X$ ,且  $7500 < E(X) < 10000$ ,求  $p$  的取值范围;

(2) 已知  $p = \frac{1}{20}$ ,若超市聘请兼职员工来检查这批牛肉干是否变质,超市需要支付兼职员工工资



5000元,这样检查到的变质牛肉干直接当废物处理,就不会流入到消费者手中.请以超市获取的利润为决策依据,判断超市是否需要聘请兼职员工来检验这批牛肉干是否变质?

20.(本小题满分12分)已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ ,过直线 $l:x=2$ 上一点 $P$ 作椭圆的切线,切点为 $A$ ,当 $P$ 点在 $x$ 轴上时,切线 $PA$ 的斜率为 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ .



- (1)求椭圆的方程;
- (2)设 $O$ 为坐标原点,求 $\triangle POA$ 面积的最小值.

21.(本小题满分12分)已知函数 $f(x)=\frac{\sin x}{e^\pi}-\frac{a}{e^x}$

- (1)若 $f(x)\geq 0$ 在 $[-\pi,0]$ 上恒成立,求实数 $a$ 的取值范围;
- (2)若 $a=1$ ,判断关于 $x$ 的方程 $f(x)=-\frac{1}{e^\pi}$ 在 $[(2k+1)\pi,(2k+2)\pi](k\in\mathbf{N}^*)$ 内解的个数,并说明理由.

选考題:共10分.請考生在第22、23題中任一題作答.如果多做,則按所做的第一題計分.

22.(本小题满分10分)选修4-4:坐标系与参数方程

极坐标系中曲线 $T$ 的极坐标方程为 $\rho=\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$ ,以极点为原点,极轴为 $x$ 轴正半轴建立平面直角坐标系,单位长度不变,直线 $l_1,l_2$ 均过点 $F(1,0)$ ,且 $l_1\perp l_2$ ,直线 $l_1$ 的倾斜角为 $\alpha(\alpha$ 为锐角).

- (1)写出曲线 $T$ 的直角坐标方程;写出 $l_1,l_2$ 的参数方程;
- (2)设直线 $l_1,l_2$ 分别与曲线 $T$ 交于点 $A,B$ 和 $C,D$ ,线段 $AB$ 和 $CD$ 的中点分别为 $M,N$ ,求 $|MN|$ 的最小值.

23.(本小题满分10分)选修4-5:不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+2|+|2x-3|$ .

- (1)求不等式 $f(x)>6$ 的解集;
- (2)若函数 $f(x)$ 的最小值为 $m$ ,正实数 $a,b$ 满足 $a^2+\frac{b^2}{9}=m$ ,证明: $\frac{1}{a}+\frac{3}{b}\geq\frac{4\sqrt{7}}{7}$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

