2021 年普通高等学校全国统一招生考试
湘豫名校联考

数学(文科)答案

第Ⅰ卷

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	A	D	C	D	C	B	C	A	B	C

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.**【答案】**B

【解析】$\because B=\{x|2^x>8\}=\{x|x>3\}$,$\therefore \complement_U B=\{x|x\leqslant 3\}$,$\therefore A\cap(\complement_U B)=(1,3]$,故选 B.

2.**【答案】**A

【解析】由已知可知 $z=\dfrac{-\mathrm{i}-1}{1-\mathrm{i}}$,于是 $|z|=\dfrac{|-\mathrm{i}-1|}{|1-\mathrm{i}|}=1$,故选 A.

3.**【答案】**A

【解析】因为 $f(-x)=-\dfrac{3x}{x^2+\cos x}=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数,其图象关于原点对称,排除 B,D;因为 $f(\pi)=\dfrac{3\pi}{\pi^2-1}>0$,所以排除 C,故选 A.

4.**【答案】**D

【解析】$\because \cos^2\alpha+\cos(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha)=\cos^2\alpha+\sin 2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{1+2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{7}{10}$,

$\therefore \tan\alpha=3$ 或 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{7}$(舍). $\therefore \tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\dfrac{3}{4}$. 故选 D.

5.**【答案】**C

【解析】计算可得 $\overline{x}=5$,$\overline{y}\approx 3.69$,将点(5,3.69)代入 $\hat{y}=\hat{b}x+1.21$,可得 $\hat{b}=0.496$,所以 $\hat{y}=0.496x+1.21$,将 $x=10$ 代入,可得 $\hat{y}=6.17$ 万亿元,故选 C.

6.**【答案】**D

【解析】根据题意,得 $g(x)=-\cos2\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)=-\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$,所以 $2x-\dfrac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$,令 $k=1$,可得 $x=\dfrac{5\pi}{8}$,故选 D.

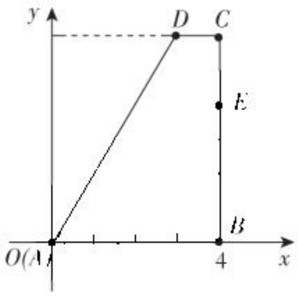
7.【答案】C

【解析】法一：由题意可得$|\overrightarrow{AD}|=6$，

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}^2+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}^2=\frac{2}{3}\times 6\times 4\times\cos 60^\circ+\frac{1}{8}\times 4^2+\frac{2}{3}\times 6^2=34$. 故选 C.

法二：



画出图形，由题意可得$C(4,3\sqrt{3})$，$E(4,2\sqrt{3})$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times 4+2\sqrt{3}\times 3\sqrt{3}=34$. 故选 C.

8.【答案】B

【解析】由题意设$f(x)=x^2+bx+c$，$f'(x)=2x+b$，即$x^2+bx+c=x^2+2x+b-1$，解得$b=2$，$c=1$，所以$f(x)=x^2+2x+1$，故选 B.

9.【答案】C

【解析】设$M(x,y)$，$P(x_0,y_0)$，则$Q(-x_0,-y_0)$，则$k_{PM}=\frac{y-y_0}{x-x_0}$，$k_{QM}=\frac{y+y_0}{x+x_0}$，

$$\therefore k_{PM}\cdot k_{QM}=\frac{y^2-y_0^2}{x^2-x_0^2}=\frac{b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)-b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)}{x^2-x_0^2}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4},$$

所以双曲线 C 的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$，所以$-\frac{\sqrt{3}}{2}<k<\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

10.【答案】A

【解析】由题意可得，外面的正六边形的面积为$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{3})^2=\frac{9\sqrt{3}}{2}$，内部的小正六边形的面积为$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以所求概率为$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}$. 故选 A.

11.【答案】B

【解析】执行程序框图，可得：

$k=1,S=0$，满足 $k<5$，$m=11-2=9$，满足 $k<11$，$S=9$；

$k=2$，满足 $k<5$，$m=11-4=7$，满足 $k<11$，$S=16$；

$k=3$，满足 $k<5$，$m=11-6=5$，满足 $k<11$，$S=21$；

$k=4$，满足 $k<5$，$m=11-8=3$，满足 $k<11$，$S=24$；

$k=5$，不满足 $k<5$，$m=10-11=-1$，满足 $k<11$，$S=23$；

$k=6$，不满足 $k<5$，$m=12-11=1$，满足 $k<11$，$S=24$；

$k=7$，不满足 $k<5$，$m=14-11=3$，满足 $k<11$，$S=27$；

$k=8$，不满足 $k<5$，$m=16-11=5$，满足 $k<11$，$S=32$；

$k=9$，不满足 $k<5$，$m=18-11=7$，满足 $k<11$，$S=39$；

$k=10$，不满足 $k<5$，$m=20-11=9$，满足 $k<11$，$S=48$；

$k=11$，不满足 $k<5$，$m=22-11=11$．不满足 $k<11$，结束循环，此时输出 S 的值为 48．故选 B.

12.【答案】C

【解析】由题可得 $\cos xf'(x)-\sin xf(x)<\cos xf(x)$，所以 $(\cos xf(x))'<\cos xf(x)$，设 $g(x)=\dfrac{\cos xf(x)}{e^x}$则 $g'(x)=\dfrac{(\cos xf(x))'-\cos xf(x)}{e^x}<0$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减．由 $g(0)>g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>g(\pi)$ 可得 $f(0)>0>-\dfrac{f(\pi)}{e^\pi}$，所以 $f(0)>0,f(\pi)>0$，所以选项 A、B 错误，选项 C 正确．把 $x=\dfrac{3}{2}$代入 $\cos xf'(x)<(\cos x+\sin x)f(x)$得 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$，选项 D 错误，故选 C.

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题．每小题 5 分，共 20 分．

13.【答案】-1

【解析】$\because f(x)=e^x$，$\therefore f'(x)=e^x$，$\therefore f'(0)=1$，切线方程为 $y=x+1$，$\therefore$切线在 x 轴上的截距为 -1.

14.【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】由题意得，当两切线分别为 $x=a$ 和 $y=2$ 时，也满足条件，$\therefore a^2+4=12$，$\therefore a^2=8$，$\therefore e^2=\dfrac{a^2-4}{a^2}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

15.【答案】$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$（答案不唯一）

【解析】由题意知，把 $1+i$ 化成指数式需满足 $\tan\theta=1$，例如当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$，当 $\theta=\dfrac{5\pi}{4}$时，$1+i=-\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$.

16.【答案】3π

【解析】根据题意，设正方体的棱长为 a，则正方体的体对角线长为$\sqrt{3}a$，故当正方体旋转到一条体对角线垂直于桌面时，容器内水面与桌面距离最大，又水的体积是正方体体积的一半，所以容器内的水面与桌面的最大距离为体对角线的一半，即最大距离为$\frac{\sqrt{3}a}{2}$. 设正方体外接球的球心为 O，则球心 O 为体对角线的中点，设正方体为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则 O 为 BD_1 的中点，取 AA_1、CC_1 的中点 G、H，A_1B_1、B_1C_1 的中点 E 和 F，可证 $BD_1\perp EF$，$BD_1\perp GF$，进而可证 $BD_1\perp$ 平面 $GEFH$，同理可得，水面截正方体各面所形成的图形为正六边形，且边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 周长为 $3\sqrt{2}a=3\sqrt{2}$，即 $a=1$，所以正方体外接球的半径为 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，表面积为 $4\pi R^2=3\pi$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题. 每个考题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.【解析】

(1) $\because S_n=n^2+n$，$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=2n$，　　(2 分)

又 $b_1=S_1=2$，$\therefore b_n=2n(n\in\mathbf{N}^*)$，$\therefore b_8=16$，　　(3 分)

$\therefore a_1=2$，$a_4=16$，　　(4 分)

$\therefore$ 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 2，$\therefore$ $a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$.　　(6 分)

(2) $\because c_n=(a_n)^{\cos n\pi}$，所以当 n 为奇数时，$c_n=\frac{1}{a_n}$，当 n 为偶数时，$c_n=a_n$，$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 的前 2 021项的乘积 $T_{2\,021}$ 为：

$$T_{2\,021}=\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{2\,020}}{a_{2\,019}}\cdot\frac{1}{a_{2\,021}}\qquad(9\text{ 分})$$

$$=\frac{2^{1\,010}}{2^{2\,021}}=2^{-1\,011}.\qquad(12\text{ 分})$$

18.【解析】

(1)根据正视图的概念，可得 $AB\perp$ 平面 PAD，

$\therefore AB\perp PD$.　　(2 分)

$\because E$ 为 PD 的中点，$PA=AD$，$\therefore AE\perp PD$.　　(4 分)

$\because AE\cap AB=A$，$\therefore PD\perp$ 平面 ABE.　　(5 分)

(2) $\because S_{\text{四边形}ABCD}=\frac{1}{2}\times 2\times(1+2)=3$，$\therefore V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{\text{四边形}ABCD}\cdot PA=\frac{1}{3}\times 3\times 2=2$，　　(6 分)

又 E 为 PD 的中点，$\therefore V_{E-ABCD}=\frac{1}{2}V_{P-ABCD}=1$.　　(8 分)

又 $S_{\triangle PAE}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$，$\therefore V_{E-PAB}=V_{B-PAE}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAE}\cdot AB=\frac{1}{3}\times1\times1=\frac{1}{3}$.

（10 分）

$V_{E-PBC}=V_{P-ABCD}-V_{E-ABCD}-V_{E-PAB}=2-1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. （12 分）

19.【解析】

(1)填表如下：

	非特殊节日的天数	特殊节日的天数	总计
销售量在[120,160]内的天数	160	120	280
销售量在(160,200]内的天数	10	30	40
总计	170	150	320

（2 分）

$K^2=\frac{320\times(160\times30-120\times10)^2}{170\times150\times40\times280}\approx14.521>6.635$，

故有 99% 的把握认为“每天的玫瑰花的销售量与特殊节日有关”. （4 分）

(2)根据分层抽样，抽取销售量在[120,160]内的特殊节日有 4 天，记为 A,B,C,D，销售量在(160,200]内的特殊节日有 1 天，记为 a， （6 分）

则从中抽取 2 天的结果为(A,B)，(A,C)，(A,D)，(A,a)，(B,C)，(B,D)，(B,a)，(C,D)，(C,a)，(D,a)，共 10 种. （8 分）

其中这两天玫瑰花的销售量在[120,160]内的结果有(A,B)，(A,C)，(A,D)，(B,C)，(B,D)，(C,D)，共 6 种， （11 分）

所以所求概率为$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. （12 分）

20.【解析】

(1)当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 得，

$(1+2k^2)x^2-4kmx+2m^2-4=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$， （2 分）

则 $x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-4}{1+2k^2}$，(※) （3 分）

由 $OA\perp OB$ 得 $x_1x_2+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$，

将(※)代入化简得，$3m^2=4(k^2+1)$，所以点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$直线 l 恒与定圆 $x^2+y^2=\frac{4}{3}$相切， （5 分）

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$，也满足与定圆 $x^2+y^2=\frac{4}{3}$相切，

（6 分）

$\therefore$直线 l 恒与一个定圆相切.

(2)设 $P(x_0,y_0)$，当 A,B 不在坐标轴上，且 AB 的斜率存在时，

设直线 $PA:y=k_1(x-x_1)+y_1$，代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，

由 $\Delta=0$，得 $k_1=-\frac{x_1}{2y_1}$，∴直线 $PA:\frac{x_1x}{4}+\frac{y_1y}{2}=1$，（7 分）

同理可得，$PB:\frac{x_2x}{4}+\frac{y_2y}{2}=1$，因为它们都过点 $P(x_0,y_0)$，所以$\frac{x_1x_0}{4}+\frac{y_1y_0}{2}=1$，$\frac{x_2x_0}{4}+\frac{y_2y_0}{2}=1$，所以直线$\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{2}=1$ 同时过点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

即直线 l 为$\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{2}=1$，即 $y=-\frac{x_0x}{2y_0}+\frac{2}{y_0}$，与 $y=kx+m$ 对比得，$k=-\frac{x_0}{2y_0}$，$m=\frac{2}{y_0}$，（10 分）

由(1)知，$3m^2=4(k^2+1)$，故有$\frac{12}{y_0^2}-\frac{x_0^2}{y_0^2}=4$，即$\frac{x_0^2}{12}+\frac{y_0^2}{3}=1$，

当 A,B 在坐标轴上，或 AB 斜率不存在时，经检验 $P(x_0,y_0)$ 仍满足$\frac{x_0^2}{12}+\frac{y_0^2}{3}=1$，

所以点 P 的轨迹方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$.（12 分）

21.【解析】

(1)由题意得$g(x)=f'(x)+x^2-3x+2=\ln x+x^2-3x+2$，

则$g'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$.（1 分）

由$g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$或 $x=1$.

由$g'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$或 $x>1$；由$g'(x)<0$，得$\frac{1}{2}<x<1$.

故当 x 在$(0,+\infty)$上变化时，$g'(x)$，$g(x)$的变化情况如下表：

x	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

根据上表知 $g(x)_{极大值}=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\ln 2>0$ ，$g(x)_{极小值}=g(1)=0$，（3 分）

$g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{21}{16}-2\ln 2<0$.

根据零点存在性定理，函数 $g(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上存在唯一零点，又因为 $g(1)=0$，

所以根据 $g(x)$的单调性可知，函数 $g(x)=f'(x)+x^2-3x+2$ 在$(0,+\infty)$上零点的个数为 2.（4 分）

(2)因为 $f'(x)=\ln x$，其反函数为 $h(x)=e^x$，所以原不等式为$\frac{x(\ln x-1)}{e^x}>x^3-x-1\Leftrightarrow x(\ln x-1)>(x^3-x-1)e^x$.（5 分）

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，故函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $f(x)>f(1)=-1$. （6 分）

设函数 $G(x)=(x^3-x-1)e^x$，则 $G'(x)=(x^3+3x^2-x-2)e^x$.

设函数 $p(x)=x^3+3x^2-x-2$，则 $p'(x)=3x^2+6x-1$，易知 $p'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.

因为 $p'(0)\cdot p'(1)=-8<0$，所以存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $p'(x_0)=0$， （8 分）

从而函数 $p(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；在 $(x_0,1)$ 上单调递增.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$p(x_0)<p(0)=-2$，当 $x\in(x_0,1)$ 时，$p(x_0)<0$，$p(1)>0$，

故存在 $x_1\in(0,1)$，使得 $G'(x_1)=0$， （9 分）

即当 $x\in(0,x_1)$ 时，$G'(x)<0$，当 $x\in(x_1,1)$ 时，$G'(x)>0$，

从而函数 $G(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减；在 $(x_1,1)$ 上单调递增.

因为 $G(0)=-1$，$G(1)=-e$，

故当 $x\in(0,1)$ 时，$G(x)<G(0)=-1$， （11 分）

所以 $x(\ln x-1)>(x^2-x-1)e^x$，

故 $\dfrac{f(x)}{h(x)}>x^2-x-1$. （12 分）

（二）选考题：共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做第一题计分.

22.**【解析】**

(1) 由 $y=\dfrac{2(1-k^2)}{1+k^2}$，得 $\dfrac{y}{2}=-1+\dfrac{2}{1+k^2}$，即 $\dfrac{y}{2}+1=\dfrac{2}{1+k^2}$， （2 分）

又 $x+1=\dfrac{4k}{1+k^2}$，两式相除得 $k=\dfrac{x+1}{y+2}$，代入 $x+1=\dfrac{4k}{1+k^2}$，

得 $\dfrac{4\times\dfrac{x+1}{y+2}}{1+\left(\dfrac{x+1}{y+2}\right)^2}=x+1$. （4 分）

整理得 $(x+1)^2+y^2=4(y\neq-2)$，即为 C_1 的普通方程. （5 分）

(2) 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=a$，代直角坐标方程为 $x+y-\sqrt{2}a=0$， （6 分）

则圆 C_1 的圆心 $(-1,0)$ 到直线 $x+y-\sqrt{2}a=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|-1-\sqrt{2}a|}{\sqrt{2}}$， （8 分）

则 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\dfrac{(1+\sqrt{2}a)^2}{2}}=\sqrt{14}$，$\therefore a=0$ 或 $-\sqrt{2}$. （10 分）

23.**【解析】**

(1) $\because a^2+b^2\geqslant 2ab$，$\therefore 2(a^2+b^2)\geqslant a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$. （2 分）

即 $a^2+b^2\geqslant\dfrac{(a+b)^2}{2}$，两边开平方得 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}|a+b|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$， （3 分）

同理可得 $\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$，$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$，

三式相加，得 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)=\sqrt{2}M$（当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立），所以 $M=1$. （5 分）

(2) 由(1)可知即求不等式 $|3x+3|+|x-2|>4$ 的解集，

当 $x\leqslant-1$ 时，原不等式等价于 $-(3x+3)+(2-x)>4$，解得 $x<-\frac{5}{4}$， （7 分）

当 $-1<x<2$ 时，原不等式等价于 $(3x+3)+(2-x)>4$，解得 $-\frac{1}{2}<x<2$， （8 分）

当 $x\geqslant2$ 时，原不等式等价于 $(3x+3)+(x-2)>4$，解得 $x\geqslant2$， （9 分）

综上所述，原不等式的解集为 $\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$. （10 分）