高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{-1,0,2\}$，$B=\{x|x-1>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0\}$　　B. $\{2\}$

C. $\{-1,0\}$　　D. $\{0,2\}$

2. 已知复数 z 满足 $(1+i)z-2i=0$，则 $z=$

A. $1+i$　　B. $1-i$　　C. $2+i$　　D. $2-i$

3. 已知 $a=(2-m,3)$，$b=(4,1+m)$，若 $a\perp b$，则 $m=$

A. 3　　B. -3

C. 11　　D. -11

4. 已知 $\tan\alpha=-3$，则 $\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=$

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$　　B. $-2\sqrt{2}$

C. $-\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　D. $-\sqrt{2}$

5. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+2y+1\leqslant 0,\\2x-y+2\geqslant 0,\\x-2y-2\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+3y$ 的最小值为

A. 1　　B. -3　　C. -6　　D. -8

6. 已知 F 为抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点，点 A 为 C 上一点，点 B 的坐标为 $(6,0)$，若 $|AF|=|BF|$，则 $\triangle ABF$ 的面积为

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

7. 若 m,n 是两条不同的直线，α,β,γ 是三个不同的平面，则下列命题错误的是

A. 若 $\alpha/\!/\beta$，$\beta/\!/\gamma$，则 $\alpha/\!/\gamma$ ✓

B. 若 $m/\!/n$，$\alpha/\!/\beta$，$n\perp\alpha$，则 $m\perp\beta$

C. 若 $m\perp\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则 $m/\!/\beta$

D. 若 $m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$

8. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=2\sqrt{2}$，以 A,B 为焦点的双曲线经过 C,D 两点，则此双曲线的离心率为

A. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{3}+1$

C. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　　D. $2(\sqrt{3}-1)$

9. 某医院计划安排甲、乙、丙三名新医生到 A,B,C 三家医院进修，每个人只能去一家医院，每家医院都必须有人去，则甲恰好去 C 医院的概率为

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{3}$

10. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=6$，$AB=8$，则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球与内切球的表面积之比为

A. $\frac{\sqrt{41}}{2}$　　B. $\frac{41}{4}$　　C. 3　　D. $\frac{11}{2}$

11. 已知直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 为函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 图象的一条对称轴，$f(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{2}$ 的交点中，相邻两点间的最小距离为 $\frac{\pi}{3}$，那么函数 $f(x)=$

A. $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

C. $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

12. 已知函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(6-x)=4-f(x)$，若函数 $y=\frac{2x}{x-3}$ 的图象与 $y=f(x)$ 的图象的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=5\ 400$，则两函数图象交点的个数为

A. 1 080　　B. 1 090　　C. 1 100　　D. 1 150

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在△ABC 中，$B+C=\frac{\pi}{3}$，$AB=2$，$AC=3$，则 $BC=$ $\sqrt{19}$ ______.

14. 若倾斜角为 60° 且经过原点的直线与圆 $x^2+y^2-4x=0$ 交于 A,B 两点，则 $|AB|=$ 2 ______.

15. 若直线 $y=k(x-2)$ 与曲线 $y=e^x$ 相切，则切点的坐标为______.

16. 已知函数 $f(x)=\ln x+ax(a>0)$，若对任意的 $x_1,x_2\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，且 $x_1\neq x_2$，不等式 $|f(x_2)-f(x_1)|>\left|\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right|$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为______.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17—21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.（本小题满分12分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+1$，设$b_n=a_n+1$.

（1）证明：$\{b_n\}$是等比数列；

（2）求$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.

18.（本小题满分12分）

“十四五”规划纲要提出，全面推动长江经济带发展，协同推动生态环境保护和经济发展。长江水资源约占全国总量的36%，长江流域河湖、水库、湿地面积约占全国的20%，珍稀濒危植物约占全国的39.7%，淡水鱼类约占全国的33%。长江经济带在我国生态文明建设中占据重要位置。长江流域某地区经过治理，生态系统得到很大改善，水生动物数量有所增加。为调查该地区A种水生动物的数量，将其分成面积相近的100个小水域，从这些小水域中用简单随机抽样的方法抽取20个作为样本，调查得到样本数据(x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,20)$，其中x_i和y_i分别表示第i个样本区域的水草覆盖面积（单位：公顷）和A种水生动物的数量，并计算得$\sum_{i=1}^{20}x_i=60$，$\sum_{i=1}^{20}y_i=1200$，$\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=120$，$\sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2=9\,000$，$\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=1\,000$.

（1）求该地区A种水生动物数量的估计值（A种水生动物数量的估计值等于样本区域A种水生动物数量的平均数乘以小水域数）；

（2）求样本(x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,20)$的相关系数（精确到0.01）；

（3）根据现有统计资料，各地块间水草覆盖面积差异很大。为提高样本的代表性以获得该地区A种水生动物数量更准确的估计，请给出一种你认为更合理的抽样方法，并说明理由。

万 10.5

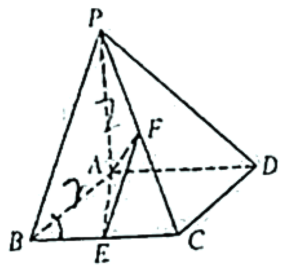
附：相关系数$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，$\sqrt{3}\approx1.732$.

19.（本小题满分12分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，四边形$ABCD$为菱形，且$\angle ABC=60°$，$PA\perp$平面$ABCD$，E为BC的中点，F为棱PC上一点.

（1）证明：平面$AEF\perp$平面PAD；

（2）若F为PC的中点，且$AB=AP=2$时，求点P到平面AEF的距离.



20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+a\left(\frac{1}{x}-1\right)(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的值.

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，P 是 E 上一动点，$\triangle PF_1F_2$ 的最大面积为 $\sqrt{3}$，$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$.

(1)求 E 的方程；

(2)若直线 $x-y-1=0$ 与 E 交于 A,B 两点，C,D 为 E 上两点，且 $CD\perp AB$，求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，半圆 C 的极坐标方程为 $2\sin\theta,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(1)求半圆 C 的参数方程；

(2)设 T 是半圆 C 上的一点，且 $|OT|=\sqrt{3}$，试写出点 T 的极坐标.

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知 a,b,c 均为正实数，且 $abc=1$. 证明：

(1)$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$；

(2)$\frac{b^6}{a^3+1}+\frac{c^6}{b^3+1}+\frac{a^6}{c^3+1}\geqslant\frac{3}{2}$.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

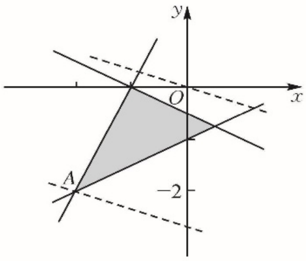
1. B　因为 $B=\{x\,|\,x-1>0\}=\{x\,|\,x>1\}$，又 $A=\{-1,0,2\}$，则 $A\cap B=\{2\}$. 故选 B.

2. A　$z=\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2+2i}{2}=1+i$. 故选 A.

3. C　因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2-m,3)\cdot(4,1+m)=8-4m+3+3m=0$，解得 $m=11$. 故选 C.

4. B　$\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\tan\alpha)}{\tan\alpha+2}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times4}{-1}=-2\sqrt{2}$. 故选 B.

5. D　作出约束条件的可行域(如图阴影部分)，



当直线 $x+3y-z=0$ 过点 $A(-2,-2)$ 时，z 有最小值，即 $z_{\min}=-2+3\times(-2)=-8$. 故选 D.

6. C　由题意得 $F(2,0)$，则 $|AF|=|BF|=4$，即点 A 到准线 $x=-2$ 的距离为 4，所以点 A 的横坐标为 2，则 $|y_A|=4$，所以 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\times(6-2)\times4=8$. 故选 C.

7. C　对于 A，由面面平行定义知 A 正确；对于 B，若 $\alpha/\!/\beta,n\perp\alpha$，则 $n\perp\beta$，又 $m/\!/n$，则 $m\perp\beta$，B 正确；对于 C，若 $m\perp\alpha,\alpha\perp\beta$，则 $m/\!/\beta$ 或 $m\subset\beta$，C 错误；对于 D，若 $m\perp\alpha,m\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$，D 正确. 故选 C.

8. A　由题可知 $c=2$，$BD=\sqrt{16+8}=2\sqrt{6}$，所以 $2a=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$，即 $a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，所以此双曲线的离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.

9. D　安排甲、乙、丙三名新医生到 A,B,C 三家医院进修，共有(甲→A，乙→B，丙→C)，(甲→A，乙→C，丙→B)，(甲→B，乙→A，丙→C)，(甲→B，乙→C，丙→A)，(甲→C，乙→A，丙→B)，(甲→C，乙→B，丙→A)共 6 种情况；其中甲恰好去 C 医院的有(甲→C，乙→A，丙→B)，(甲→C，乙→B，丙→A)共 2 种情况，故所求概率 $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. 故选 D.

10. B　设四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球与内切球的半径分别为 R,r. 因为 $V_{四棱锥P-ABCD}=\frac{1}{3}\times8^2\times6=128$，四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积 $S=8^2+\frac{1}{2}\times6\times8\times2+\frac{1}{2}\times8\times10\times2=192$，所以 $r=\frac{3V_{四棱锥P-ABCD}}{S}=2$，$R=\frac{1}{2}PC=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+8^2+8^2}=\sqrt{41}$，所以四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球与内切球的表面积之比为 $\frac{4\pi R^2}{4\pi r^2}=\frac{41}{4}$. 故选 B.

11. D　由 $\sin(\omega x+\varphi)=\frac{1}{2}$，得 $\omega x_1+\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$，或 $\omega x_2+\varphi=\frac{5\pi}{6}+2n\pi\,(n\in\mathbf{Z})$，所以相邻的两角的差为 $\omega|x_2-x_1|=\frac{2\pi}{3}$，或 $\omega|x_2-x_1|=\frac{4\pi}{3}$，所以相邻两点中距离较小的应满足 $\omega|x_2-x_1|=\frac{2\pi}{3}$，又 $|x_2-x_1|_{\min}=\frac{\pi}{3}$，所以 $\omega=2$. 故 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$. 因为直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴，所以 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 故选 D.

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

12. A　因为函数 $y=f(x)$ 满足 $f(6-x)=4-f(x)$，即 $f(6-x)+f(x)=4$，所以函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(3,2)$ 对称. 又 $y=\frac{2x}{x-3}=\frac{2(x-3)+6}{x-3}=2+\frac{6}{x-3}$，所以函数 $y=\frac{2x}{x-3}$ 的图象也关于点 $(3,2)$ 对称. 若点 (x_i,y_i) 为两函数图象的交点，则点 $(6-x_i,4-y_i)$ 也为其交点，且四个坐标之和为 10. 因为两函数图象都关于点 $(3,2)$ 对称，所以交点可以两两配对，所以 $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=\frac{n}{2}\times10=5\ 400$，解得 $n=1\ 080$. 故选 A.

13. $\sqrt{19}$　由已知得 $A=\frac{2\pi}{3}$. 因为 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=19$，所以 $BC=\sqrt{19}$.

14. 2　圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 的圆心为 $(2,0)$，半径为 2，直线方程为 $y=\sqrt{3}x$，可得圆心到直线的距离为 $\frac{|2\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1^2}}=\sqrt{3}$，故 $|AB|=2\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}=2$.

15. $(3,e^3)$　设切点为 (x_0,y_0)，$\because y'=e^x$，$\therefore k=e^{x_0}$，又 $\because y_0=e^{x_0}$，$y_0=k(x_0-2)$，$\therefore e^{x_0}=e^{x_0}(x_0-2)$，解得：$x_0=3$，故切点坐标为 $(3,e^3)$.

16. $(0,2]$　$\because f'(x)=\frac{1}{x}+a>0$，$\therefore f(x)=\ln x+ax$ 在 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，又 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，$\therefore|f(x_2)-f(x_1)|<\left|\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right|$，化简得 $f(x_2)+\frac{1}{x_2}<f(x_1)+\frac{1}{x_1}$. 设 $F(x)=f(x)+\frac{1}{x}$，即函数 $F(x)$ 在 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，$\therefore F'(x)=\frac{ax^2+x-1}{x^2}\leqslant0$ 恒成立，只需满足 $\frac{a}{4}+\frac{1}{2}-1\leqslant0$，解得 $a\leqslant2$. 又 $\because a>0$，$\therefore 0<a\leqslant2$，即实数 a 的取值范围为 $(0,2]$.

17. (1)证明：当 $n=1$ 时，$a_2=2a_1+1$，则 $a_1=1$，…… 1 分

从而由 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，得 $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，…… 3 分

所以 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列. …… 5 分

(2)解：由(1)得 $a_n=2^n-1$，…… 7 分

所以 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}=(2+2^3+\cdots+2^{2n+1})-(n+1)$ …… 9 分

$=\frac{2(1-4^{n+1})}{1-4}-(n+1)=\frac{2^{2n+3}-3n-5}{3}$. …… 12 分

18. 解：(1)样本区域水生动物平均数为 $\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}y_i=\frac{1}{20}\times1\ 200=60$，…… 2 分

地块数为 100，该地区这种水生动物数量的估计值为 $100\times60=6\ 000$. …… 4 分

(2)样本 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,20)$ 的相关系数为

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{1\ 000}{\sqrt{120\times9\ 000}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}\approx0.96.$$ …… 8 分

(3)采用分层抽样的方法更合适. 理由如下：

由(2)知各样本区域的 A 种水生动物的数量与水草覆盖面积有很强的正相关性，由于各小水域间水草覆盖面积差异很大，从而各地块间这种野生动物的数量差异很大，所以采用分层抽样的方法能较好地保持样本结构与总体结构的一致性，提高了样本的代表性，从而可以获得该地区这种水生动物数量更准确的估计. …… 12 分

19. (1)证明：连接 AC.

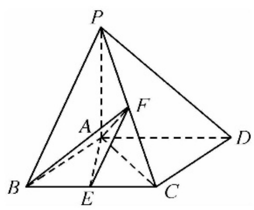
因为 $AB=BC$，$\angle ABC=60°$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形，

因为 E 为 BC 的中点，所以 $AE\perp BC$，又 $AD/\!/BC$，所以 $AE\perp AD$. …… 1 分

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AE\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AE$，…… 2 分

又 $AP\cap AD=A$，$AP,AD\subset$ 平面 PAD，所以 $AE\perp$ 平面 PAD. …… 3 分

因为 $AE\subset$ 平面 AEF，所以平面 $AEF\perp$ 平面 PAD. …… 5 分



(2)解：连接 BF.

因为 E,F 分别为 BC,PC 的中点，所以 $EF/\!/PB$. …… 6 分

因为 $EF\subset$平面 AEF，$PB\not\subset$平面 AEF，所以 $PB/\!/$平面 AEF.

设点 P 到平面 AEF 的距离为 h，则点 B 到平面 AEF 的距离也为 h， …… 7 分

因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AB,AC\subset$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB,PA\perp AC$，

又 E,F 分别为 BC,PC 的中点，$PA=AB=AC=BC=2$，

所以 $AE=\sqrt{3}$，$AF=\frac{1}{2}PC=\sqrt{2}$，$EF=\frac{1}{2}PB=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$， …… 8 分

所以 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\cdot\sqrt{EF^2-\left(\frac{AE}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

又 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}BE\cdot AE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，点 F 到平面 ABE 的距离为 $\frac{1}{2}AP=1$，

所以 $V_{三棱锥F\text{-}ABE}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times1=\frac{\sqrt{3}}{6}$. …… 10 分

又 $V_{三棱锥F\text{-}ABE}=V_{三棱锥B\text{-}AEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle AEF}\cdot h=\frac{\sqrt{15}}{12}h$，

所以 $\frac{\sqrt{15}}{12}h=\frac{\sqrt{3}}{6}$，所以 $h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即点 P 到平面 AEF 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. …… 12 分

20. 解：(1)由 $f(x)=\ln x+a\left(\frac{1}{x}-1\right)$，得 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$. …… 1 分

①当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)=\ln x+a\left(\frac{1}{x}-1\right)$在$(0,+\infty)$上为增函数. …… 2 分

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=a$，

当 $x\in(0,a)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数，当 $x\in(a,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数. …… 4 分

综上可知：当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)=\ln x+a\left(\frac{1}{x}-1\right)$在$(0,+\infty)$上为增函数；

当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(0,a)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增. …… 5 分

(2)当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)=\ln x+a\left(\frac{1}{x}-1\right)$在$(0,+\infty)$上为增函数，

又 $f(1)=0$，则当 $x\in(0,1)$时，$f(x)<0$，不符合题意； …… 7 分

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$在 $x=a$ 处取得最小值，最小值为 $\ln a-a+1$，则 $\ln a-a+1\geqslant0$. …… 9 分

令 $g(a)=\ln a-a+1$，则 $g'(a)=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}$，

故 $g(a)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减， …… 10 分

且 $g(1)=0$，所以 $a=1$. …… 11 分

综上可知：$a=1$. …… 12 分

21. 解：(1)设椭圆 E 的半焦距为 c. 因为 $|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，所以 $c=\sqrt{3}$，

因为$\triangle PF_1F_2$ 的最大面积为$\sqrt{3}$，所以$\frac{1}{2}\cdot2c\cdot b=\sqrt{3}$，即 $bc=\sqrt{3}$， …… 2 分

所以 $b=1$，所以 $a=\sqrt{b^2+c^2}=2$，

所以椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …… 4 分

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ x-y-1=0,\end{cases}$消去 y 得 $5x^2-8x=0$，解得 $x_1=\frac{8}{5}$，$x_2=0$， …… 5 分

所以 $y_1=\frac{3}{5}$，$y_2=-1$，所以 A,B 两点的坐标分别为$\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$，$(0,-1)$，

7
官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

所以 $|AB|=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}+1\right)^2}=\frac{8\sqrt{2}}{5}$. …………………………………………………… 6 分

因为 $AB\perp CD$,所以 $S_{四边形ACBD}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=\frac{4\sqrt{2}}{5}|CD|$. ……………………………………… 7 分

设直线 CD 的方程为 $y=-x+m$,$C(x_3,y_3)$,$D(x_4,y_4)$.

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=-x+m,\end{cases}$ 消去 y 得 $5x^2-8mx+4m^2-4=0$,

所以 $\Delta=(-8m)^2-4\times5\times(4m^2-4)>0$,即 $-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$, ……………………………………… 9 分

$x_3+x_4=\frac{8m}{5}$,$x_3x_4=\frac{4m^2-4}{5}$,

所以 $|CD|=\sqrt{1+(-1)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{8m}{5}\right)^2-\frac{4(4m^2-4)}{5}}=\frac{\sqrt{2}}{5}\sqrt{80-16m^2}=\frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{5-m^2}$, ……………… 11 分

所以当 $m=0$ 时,$|CD|_{\max}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$,此时 $S_{四边形ACBD}=\frac{4\sqrt{2}}{5}\times\frac{4\sqrt{10}}{5}=\frac{32\sqrt{5}}{25}$.

所以四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 $\frac{32\sqrt{5}}{25}$. …………………………………………………… 12 分

22. 解:(1)由 $\rho=2\sin\theta$,得 $\rho^2=2\rho\sin\theta$, ……………………………………………………………… 1 分

代入公式 $\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\ \rho\sin\theta=y,\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=2y$,即 $x^2+(y-1)^2=1$, ……………………………………… 3 分

故半圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=1+\sin\alpha,\end{cases}$ 其中 α 为参数,且 $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. …………………………… 5 分

(2)因为 $|OT|=\sqrt{3}$,所以令 $\sqrt{3}=2\sin\theta$,$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, …………………………………………… 7 分

则解得 $\theta=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………………… 8 分

故点 T 的极坐标为 $\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$. ………………………………………………………………… 10 分

23. 证明:(1)因为 a,b,c 都为正实数,且 $abc=1$,

所以 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, ……………………………………………………… 3 分

当且仅当 $a=b=c=1$ 时"="成立,所以 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. ………………………………… 4 分

(2)由题意得 $\begin{cases}\frac{b^6}{a^3+1}+\frac{1}{4}(a^3+1)\geqslant b^3,\text{当且仅当 } 2b^3=a^3+1 \text{ 时等号成立,} & ①\\ \frac{c^6}{b^3+1}+\frac{1}{4}(b^3+1)\geqslant c^3,\text{当且仅当 } 2c^3=b^3+1 \text{ 时等号成立,} & ②\\ \frac{a^6}{c^3+1}+\frac{1}{4}(c^3+1)\geqslant a^3,\text{当且仅当 } 2a^3=c^3+1 \text{ 时等号成立,} & ③\end{cases}$ ……………… 7 分

由①+②+③,得 $\frac{b^6}{a^3+1}+\frac{c^6}{b^3+1}+\frac{a^6}{c^3+1}\geqslant\frac{3}{4}(a^3+b^3+c^3)-\frac{3}{4}$,当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立. …………… 9 分

又 $a^3+b^3+c^3\geqslant3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=3abc=3$,当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

所以 $\frac{b^6}{a^3+1}+\frac{c^6}{b^3+1}+\frac{a^6}{c^3+1}\geqslant\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$. …………………………………………………… 10 分

8
官方微信公众号:zizzsw 咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com 微信客服:zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线