

高 2025 届 2022-2023 学年（下）5 月名校联考

数学试题参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
B	A	D	B	B	C	C	B

【解析】

$$8. \text{ 解: } \because b \cos A + a \cos B = 6, \therefore b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + a \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 6, \therefore c^2 = 6c \Rightarrow c = 6.$$

$$\text{由 } \overrightarrow{BO} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC} \text{ 得, } \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = x\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC},$$

$$\text{即: } 18 = 36x + 24y, 32 = 24x + 64y, \text{ 解得 } x = \frac{2}{9}, y = \frac{5}{12}, \therefore x + y = \frac{23}{26}, \text{ 故选 B.}$$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

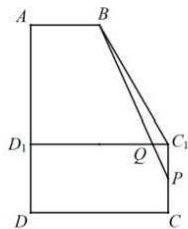
9	10	11	12
AC	ACD	ABD	ACD

【解析】

12. 解：对于 A，当 Q 为 C_1D_1 的中点时， $AC_1 \parallel$ 平面 BPQ，故 A 正确；

对于 B， $B_1D_1 \parallel BD$ ，又 $D \notin$ 平面 BPQ，BD 与平面 BPQ 只能相交，所以 B_1D_1 与平面 BPQ 只能相交，故 B 错；

对于 C， $BP = \sqrt{17}$ ，把 ABC_1D_1 沿 C_1D_1 展开与 CDD_1C_1 在同一平面（如图），则当 B，P，Q 共线时， $BQ + PQ$ 有最小值，由 $AD_1 = 4$ 可得 $BP = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ ，所以三角形 BPQ 周长的最小值为 $\sqrt{17} + \sqrt{29}$ ，故 C 正确；



对于 D， $V_{A-BPQ} = V_{Q-ABP}$ ，因 $S_{\triangle ABP}$ 为定值，又 $C_1D_1 \parallel$ 平面 ABP，故 Q 到平面 ABP 的距离也为定值，所以 V_{A-BPQ} 为定值，故选：ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13	14	15	16
$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{27}$	$5, \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{21}}{4} \right]$

【解析】

$$16. \text{ 解: 由题知, } \tan C \left(\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} \right) = 3 \Rightarrow \frac{\sin C}{\cos C} \left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} \right) = 3 \Rightarrow \frac{\sin C}{\cos C} \cdot \frac{\sin C}{\sin A \cdot \sin B} = 3,$$

$$\text{即: } \frac{\sin^2 C}{\sin A \cdot \sin B} \cdot \frac{1}{\cos C} = 3, \therefore \frac{c^2}{ab} \times \frac{2ab}{a^2 + b^2 - c^2} = 3, \text{ 又 } c = \sqrt{3}, \therefore a^2 + b^2 = 5.$$

又 $\because \triangle ABC$ 是锐角三角形， $\therefore \cos A > 0, \cos B > 0, \cos C > 0$,

即 $a^2 - b^2 + 3 > 0, b^2 - a^2 + 3 > 0, a^2 + b^2 - 3 > 0$ ，结合 $a^2 + b^2 = 5$ 得 $b^2 \in (1, 4)$.



$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C, \therefore S_{\triangle ABC}^2 = \frac{1}{4}a^2b^2 \sin^2 C, \therefore S_{\triangle ABC}^2 = \frac{a^2b^2 - 1}{4} = \frac{b^2(5 - b^2) - 1}{4},$$

$$\text{不妨设 } t = b^2 \in (1, 4), \text{ 则 } S_{\triangle ABC}^2 = -\frac{1}{4}\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{21}{16}, \therefore S_{\triangle ABC}^2 \in \left(\frac{3}{4}, \frac{21}{16}\right], \therefore S_{\triangle ABC} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{21}}{4}\right].$$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

$$17. \text{解：(1) 由正弦定理知，} \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}, \text{ 即 } \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 = \frac{a}{2R} \cdot \frac{c}{2R} + \left(\frac{b}{2R}\right)^2,$$

$$\therefore a^2 + c^2 = ac + b^2, \therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$$

$$\text{又 } \because B \in (0, \pi), \therefore B = \frac{\pi}{3}$$

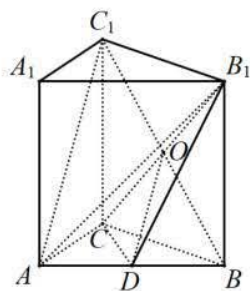
$$(2) \because b = \sqrt{3}, B = \frac{\pi}{3}, \therefore a^2 + c^2 = 3 + ac$$

$$\text{又 } \because S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore ac = 2$$

$$\therefore (a+c)^2 = 3 + 3ac = 9, \therefore a+c = 3$$

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c = 3 + \sqrt{3}$

18. 解：(1) 连接 BC_1 交 B_1C 于点 O ，连接 OD



由正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 可得 O 为 BC_1 的中点，

又 D 为 AB 的中点，所以， $AC_1 \parallel OD$ ，

又 $AC_1 \not\subset$ 平面 B_1CD ， $OD \subset$ 平面 B_1CD ， $\therefore AC_1 \parallel$ 平面 B_1CD

(2) $\because$ 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长均为 2，

$$\therefore CD \perp AB \text{ 且 } CD = \sqrt{3}, S_{\triangle ACD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore V_{A-B_1CD} = V_{B_1-ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot B_1B = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$19. \text{解：(1) } \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$(2) \because \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \lambda\overrightarrow{AB} = \left(\lambda - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{EF} &= \left[\left(\lambda - \frac{1}{3} \right) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right] \cdot \left(-\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \right) = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3} \lambda \right) \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3} \lambda \right) \times 3^2 + \frac{1}{2} \times 2^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \right) \times 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \lambda + \frac{3}{2} \\ \text{又} \because \lambda \in [0, 1], \therefore \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{EF} &\in \left[0, \frac{3}{2} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}20. \text{解: (1) } f(x) &= (\cos \omega x - \sin \omega x)(\cos \omega x + \sin \omega x) + 2\sqrt{3} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \omega x \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \omega x \right) - \sqrt{3} \\ &= \cos^2 \omega x - \sin^2 \omega x + 2\sqrt{3} \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \omega x \right) - \sqrt{3} \\ &= \cos 2\omega x + \sqrt{3} \cos \left[2 \left(\frac{\pi}{4} + \omega x \right) \right] = \cos 2\omega x - \sqrt{3} \sin 2\omega x = 2 \cos \left(2\omega x + \frac{\pi}{3} \right)\end{aligned}$$

由题知, $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, 即 $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \omega$, $\therefore \omega = 1$

$$\therefore f(x) = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right), \text{ 当 } x \in \mathbf{R} \text{ 时, } 2x + \frac{\pi}{3} \in \mathbf{R}$$

故 $f(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$

$$(2) \because [f(x) - \sqrt{2}][f(x) - 2\sqrt{2}] \leq 0, \therefore \sqrt{2} \leq f(x) \leq 2\sqrt{2}$$

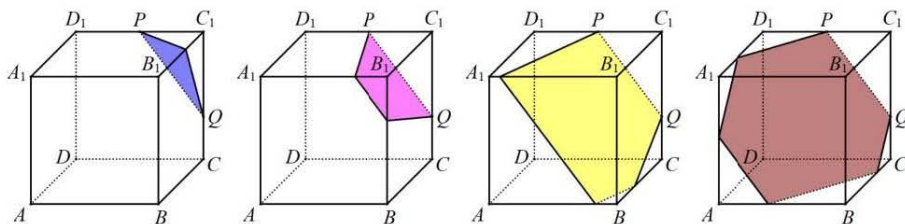
$$\text{即 } \sqrt{2} \leq 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 2\sqrt{2}, \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \leq \sqrt{2}$$

结合余弦曲线知, $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

$$\therefore -\frac{7\pi}{24} + k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \therefore M = \left[-\frac{7}{24} + k\pi, -\frac{\pi}{24} + k\pi \right], k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{又 } P = \{x \in \mathbf{Z} | 1 \leq x \leq 5\}, \therefore M \cap P = \{3\}$$

21. (1) 截面可以分别为三角形, 四边形, 五边形, 六边形



(本小题作出三角形、四边形各得 1 分, 五边形、六边形各得 2 分, 共 6 分.)

(2) 如图: 连接 PQ 所在直线交 DC 延长线于 X , 交 DD_1 的延长线于 Z ;

连接直线 MX 交 BC 于 R , 交 DA 延长线于 Y ;

连接 YZ 分别交 AA_1 , A_1D_1 于 S , T . 则六边形 $PQRMST$ 即为截面.

$\because P$ 为 C_1D_1 的中点, Q 为 CC_1 的一个三等分点 (靠近 C), $\therefore D_1P = PC_1 = 3$, $C_1Q = 4$, $QC = 2$,

$$\text{可得 } D_1Z = 4, PZ = PQ = 5, CX = \frac{3}{2}, QX = \frac{5}{2},$$

又 $CD \parallel AB$, $\frac{CR}{RB} = \frac{XR}{RM} = \frac{CX}{MB} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{1}$, 所以 $CR = 2$, $RB = 4$, $XR = \frac{5}{2}$, $RM = 5$,

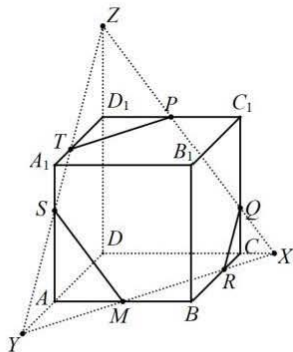
又 $AD \parallel BC$, M 为 AB 的中点, $MY = 5$, $AY = 4$, 所以 YDZ 为等腰直角三角形,

所以 $YS = 4\sqrt{2}$, $ST = 2\sqrt{2}$, $TZ = 4\sqrt{2}$, $YZ = 10\sqrt{2}$, $XY = XZ = \frac{25}{2}$,

$\therefore \triangle XYZ$ 为等腰三角形, 等边上的高为 $\frac{5}{2}\sqrt{17}$, $S_{\triangle XYZ} = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{2} \times \frac{5}{2}\sqrt{17} = \frac{25}{2}\sqrt{34}$

$S_{\triangle XQR} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$, $S_{\triangle PZT} = S_{\triangle MSY} = 2\sqrt{34}$

所以 $S_{PQRMST} = S_{\triangle XYZ} - S_{\triangle XQR} - S_{\triangle PZT} - S_{\triangle MSY} = \frac{25}{2}\sqrt{34} - \frac{\sqrt{34}}{2} - 2\sqrt{34} - 2\sqrt{34} = 8\sqrt{34}$



方法二: 可证明 $PQRM$ 与 $PTSM$ 是全等的等腰梯形, $PM = 6\sqrt{2}$, $QR = 2\sqrt{2}$, $PQ = RM = 5$, 所以等腰梯形 $PQRM$ 的高为 $\sqrt{17}$, 所以 $S_{PQRMST} = 2S_{PQRM} = 2 \times \frac{1}{2} (6\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \times \sqrt{17} = 8\sqrt{34}$.

22. (1) 由题: $\angle ADC = 360^\circ - (120^\circ + 90^\circ + 60^\circ + \theta) = 90^\circ - \theta$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理: $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{AD}{\sin \angle ACD}$, 即: $AC = 2\sqrt{3} \cos \theta$,

在 $\triangle ABC$ 中, $\because \angle ACB = \theta$, $\therefore \angle CAB = 60^\circ - \theta$. 由正弦定理: $\frac{AB}{\sin \theta} = \frac{BC}{\sin(60^\circ - \theta)} = \frac{AC}{\sin 120^\circ} = 4 \cos \theta$,

$AB = 4 \cos \theta \sin \theta = 2 \sin 2\theta$, $BC = 4 \cos \theta \sin(60^\circ - \theta)$

$\therefore S = AB + BC = 2 \sin 2\theta + 4 \cos \theta \sin(60^\circ - \theta)$ 且 $\theta \in (0, 60^\circ)$

又 $S = \sin 2\theta + \sqrt{3} \cos 2\theta + \sqrt{3} = 2 \sin(2\theta + 60^\circ) + \sqrt{3}$

$\because \theta \in (0, 60^\circ)$, $\therefore 2\theta + 60^\circ \in (60^\circ, 180^\circ)$, $\therefore S$ 的最大值为 $2 + \sqrt{3}$, 当且仅当 $\theta = 15^\circ$ 时取得等号.

(2) 由 (1) 知: $BC = 4 \cos \theta \sin(60^\circ - \theta)$, $CD = 2\sqrt{3} \sin(\theta + 30^\circ)$.

$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cos \theta \sin(60^\circ - \theta) \cdot 2\sqrt{3} \sin(\theta + 30^\circ) \cdot \sin(60^\circ + \theta)$

$\therefore S = \sqrt{3} \sin(2\theta + 60^\circ) \left[\sin(2\theta + 60^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$

不妨设 $t = \sin(2\theta + 60^\circ)$, 又 $\because \theta \in (0, 60^\circ)$, $\therefore 2\theta + 60^\circ \in (60^\circ, 180^\circ)$, $t \in (0, 1]$

$\therefore S = \sqrt{3}t^2 + \frac{3}{2}t$ 而 S 在 $t \in (0, 1]$ 上单调递增, $S_{\max} S(1) = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$, 当且仅当 $\theta = 15^\circ$ 时取得等号

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线