绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）参考解答

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分40分．

（1）D	（2）C	（3）B	（4）B
（5）D	（6）A	（7）C	（8）C

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分30分．

（9）$\sqrt{13}$	（10）28	（11）$\dfrac{\pi}{4}$
（12）$\dfrac{3}{4}$	（13）$4\sqrt{3}$	（14）-1

三．解答题

（15）本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角和的正弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识．考查运算求解能力．满分13分．

（Ⅰ）**解：** 在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得$b\sin C=c\sin B$，又由$3c\sin B=4a\sin C$，得$3b\sin C=4a\sin C$，即$3b=4a$．又因为$b+c=2a$，得到$b=\dfrac{4}{3}a$，$c=\dfrac{2}{3}a$．由余弦定理可得$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{16}{9}a^2}{2\cdot a\cdot\frac{2}{3}a}=-\dfrac{1}{4}$．

（Ⅱ）**解：** 由（Ⅰ）可得$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，从而$\sin 2B=2\sin B\cos B=-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos 2B=\cos^2 B-\sin^2 B=-\dfrac{7}{8}$，故

$$\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2B\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2B\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{8}\times\frac{1}{2}=-\frac{3\sqrt{5}+7}{16}.$$

（16）本小题主要考查离散型随机变量的分布列与数学期望，互斥事件和相互独立事件的概率计算公式等基础知识．考查运用概率知识解决简单实际问题的能力．满分13分．

（Ⅰ）**解：** 因为甲同学上学期间的三天中到校情况相互独立，且每天7:30之前到校的概率均为$\dfrac{2}{3}$，故$X\sim B\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$，从而$P(X=k)=C_3^k\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3-k}$，$k=0,1,2,3$．

所以，随机变量X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

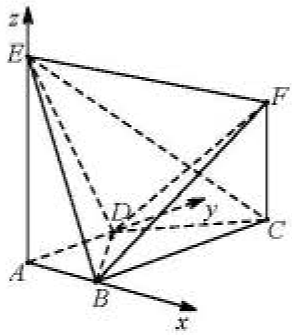
随机变量 X 的数学期望 $E(X)=3\times\frac{2}{3}=2$．

（Ⅱ）**解：** 设乙同学上学期间的三天中 7:30 之前到校的天数为 Y，则 $Y\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，且 $M=\{X=3,Y=1\}\cup\{X=2,Y=0\}$．由题意知事件 $\{X=3,Y=1\}$ 与 $\{X=2,Y=0\}$ 互斥，且事件 $\{X=3\}$ 与 $\{Y=1\}$，事件 $\{X=2\}$ 与 $\{Y=0\}$ 均相互独立，从而由（Ⅰ）知

$$P(M)=P(\{X=3,Y=1\}\cup\{X=2,Y=0\})=P(X=3,Y=1)+P(X=2,Y=0)$$

$$=P(X=3)P(Y=1)+P(X=2)P(Y=0)=\frac{8}{27}\times\frac{2}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{27}=\frac{20}{243}.$$

（17）本小题主要考查直线与平面平行、二面角、直线与平面所成的角等基础知识．考查用空间向量解决立体几何问题的方法．考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力．满分 13 分．



依题意，可以建立以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴正方向的空间直角坐标系（如图），可得 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,1,0)$，$E(0,0,2)$．设 $CF=h$（$h>0$），则 $F(1,2,h)$．

（Ⅰ）**证明：** 依题意，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$ 是平面 ADE 的法向量，又 $\overrightarrow{BF}=(0,2,h)$，可得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，又因为直线 $BF\not\subset$ 平面 ADE，所以 $BF\,/\!/$ 平面 ADE．

（Ⅱ）**解：** 依题意，$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,-2,2)$．

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDE 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+2z=0,\end{cases}$ 不妨令 $z=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$．因此有 $\cos\left\langle\overrightarrow{CE},\boldsymbol{n}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}}{\left|\overrightarrow{CE}\right|\left|\boldsymbol{n}\right|}=-\frac{4}{9}$．

所以，直线CE与平面BDE所成角的正弦值为$\frac{4}{9}$.

（III）**解：** 设$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面BDF的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+y=0,\\ 2y+hz=0,\end{cases}$

不妨令$y=1$，可得$\boldsymbol{m}=\left(1,1,-\frac{2}{h}\right)$.

由题意，有$\left|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|4-\frac{2}{h}\right|}{3\sqrt{2+\frac{4}{h^2}}}=\frac{1}{3}$，解得$h=\frac{8}{7}$. 经检验，符合题意.

所以，线段CF的长为$\frac{8}{7}$.

（18）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识. 考查用代数方法研究圆锥曲线的性质. 考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力. 满分13分.

（I）**解：** 设椭圆的半焦距为c，依题意，$2b=4$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，又$a^2=b^2+c^2$，可得$a=\sqrt{5}$，$b=2$，$c=1$.

所以，椭圆的方程为$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

（II）**解：** 由题意，设$P(x_P,y_P)$（$x_P\neq0$），$M(x_M,0)$. 设直线PB的斜率为k（$k\neq0$），

又$B(0,2)$，则直线PB的方程为$y=kx+2$，与椭圆方程联立$\begin{cases}y=kx+2,\\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$整理得

$(4+5k^2)x^2+20kx=0$，可得$x_P=-\frac{20k}{4+5k^2}$，代入$y=kx+2$得$y_P=\frac{8-10k^2}{4+5k^2}$，进而直线$OP$的斜率$\frac{y_P}{x_P}=\frac{4-5k^2}{-10k}$. 在$y=kx+2$中，令$y=0$，得$x_M=-\frac{2}{k}$. 由题意得$N(0,-1)$，所以直线$MN$的斜率为$-\frac{k}{2}$. 由$OP\perp MN$，得$\frac{4-5k^2}{-10k}\cdot\left(-\frac{k}{2}\right)=-1$，化简得$k^2=\frac{24}{5}$，从而$k=\pm\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

所以，直线PB的斜率为$\frac{2\sqrt{30}}{5}$或$-\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

（19）本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及其前n项和公式等基础知识．考查化归与转化思想和数列求和的基本方法以及运算求解能力．满分 14 分．

（Ⅰ）**解：** 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q．依题意得

$\begin{cases}6q=6+2d,\\6q^2=12+4d,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}d=3,\\q=2,\end{cases}$ 故$a_n=4+(n-1)\times 3=3n+1$，$b_n=6\times 2^{n-1}=3\times 2^n$．

所以，$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n+1$，$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=3\times 2^n$．

（Ⅱ）（ⅰ）**解：** $a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)=a_{2^n}\left(b_n-1\right)=\left(3\times 2^n+1\right)\left(3\times 2^n-1\right)=9\times 4^n-1$．

所以，数列$\left\{a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)\right\}$的通项公式为$a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)=9\times 4^n-1$．

（ⅱ）**解：** $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n}a_ic_i=\sum_{i=1}^{2^n}\left[a_i+a_i\left(c_i-1\right)\right]=\sum_{i=1}^{2^n}a_i+\sum_{i=1}^{n}a_{2^i}\left(c_{2^i}-1\right)$

$$=\left(2^n\times 4+\frac{2^n\left(2^n-1\right)}{2}\times 3\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(9\times 4^i-1\right)$$

$$=\left(3\times 2^{2n-1}+5\times 2^{n-1}\right)+9\times\frac{4\left(1-4^n\right)}{1-4}-n$$

$$=27\times 2^{2n-1}+5\times 2^{n-1}-n-12\ \left(n\in\mathbf{N}^*\right).$$

（20）本小题主要考查导数的运算、不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法．考查函数思想和化归与转化思想．考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力．满分 14 分．

（Ⅰ）**解：** 由已知，有$f'(x)=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$．因此，当$x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）时，有$\sin x>\cos x$，得$f'(x)<0$，则$f(x)$单调递减；当$x\in\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）时，有$\sin x<\cos x$，得$f'(x)>0$，则$f(x)$单调递增．

所以，$f(x)$的单调递增区间为$\left[2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$），$f(x)$的单调递减区间为$\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）．

（Ⅱ）**证明：** 记 $h(x)=f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$．依题意及（Ⅰ），有 $g(x)=\mathrm{e}^{x}(\cos x-\sin x)$，从而 $g'(x)=-2\mathrm{e}^{x}\sin x$．当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$，故

$$h'(x)=f'(x)+g'(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+g(x)(-1)=g'(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)<0.$$

因此，$h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，进而 $h(x)\geqslant h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$．

所以，当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\geqslant 0$．

（Ⅲ）**证明：** 依题意，$u(x_n)=f(x_n)-1=0$，即 $\mathrm{e}^{x_n}\cos x_n=1$．记 $y_n=x_n-2n\pi$，则 $y_n\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，且 $f(y_n)=\mathrm{e}^{y_n}\cos y_n=\mathrm{e}^{x_n-2n\pi}\cos(x_n-2n\pi)=\mathrm{e}^{-2n\pi}$ （$n\in\mathbf{N}$）．

由 $f(y_n)=\mathrm{e}^{-2n\pi}\leqslant 1=f(y_0)$ 及（Ⅰ），得 $y_n\geqslant y_0$．由（Ⅱ）知，当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数，因此 $g(y_n)\leqslant g(y_0)<g\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$．又由（Ⅱ）知，$f(y_n)+g(y_n)\left(\frac{\pi}{2}-y_n\right)\geqslant 0$，故

$$\frac{\pi}{2}-y_n\leqslant-\frac{f(y_n)}{g(y_n)}=-\frac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{g(y_n)}\leqslant-\frac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{g(y_0)}=\frac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{\mathrm{e}^{y_0}(\sin y_0-\cos y_0)}<\frac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}.$$

所以，$2n\pi+\frac{\pi}{2}-x_n<\frac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}$．