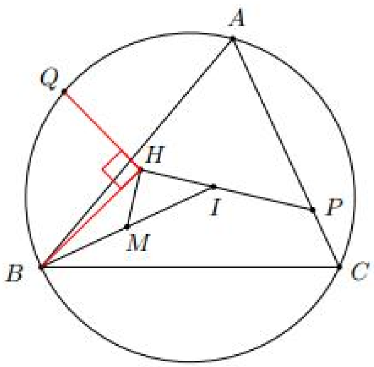
2020 年全国高中数学联合竞赛加试试题（A 卷）

一、(本题满分 40 分)

如图, 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC$, I 为内心, M 为 BI 的中点, P 为边 AC 上一点, 满足 $AP=3PC$, PI 延长线上一点 H 满足 $MH\perp PH$, Q 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上劣弧 AB 的中点. 证明: $BH\perp QH$.

(答题时请将图画在答卷纸上)



题 图

二、(本题满分 40 分)

给定整数 $n\geqslant 3$. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n},b_1,b_2,\cdots,b_{2n}$ 是 $4n$ 个非负实数, 满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}>0,$$

且对任意 $i=1,2,\cdots,2n$, 有 $a_ia_{i+2}\geqslant b_i+b_{i+1}$ (这里 $a_{2n+1}=a_1,a_{2n+2}=a_2,b_{2n+1}=b_1$).

求 $a_1+a_2+\cdots+a_{2n}$ 的最小值.

三、(本题满分 50 分)

设 $a_1=1,a_2=2,a_n=2a_{n-1}+a_{n-2},n=3,4,\cdots$. 证明: 对整数 $n\geqslant 5$, a_n 必有一个模 4 余 1 的素因子.

四、(本题满分 50 分)

给定凸 20 边形 P. 用 P 的 17 条在内部不相交的对角线将 P 分割成 18 个三角形, 所得图形称为 P 的一个三角剖分图. 对 P 的任意一个三角剖分图 T, P 的 20 条边以及添加的 17 条对角线均称为 T 的边. T 的任意 10 条两两无公共端点的边的集合称为 T 的一个完美匹配. 当 T 取遍 P 的所有三角剖分图时, 求 T 的完美匹配个数的最大值.

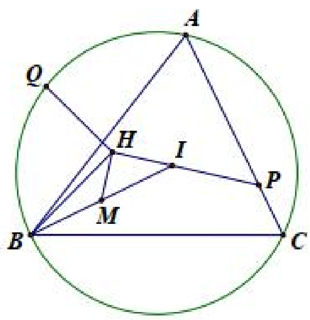
2020 年全国高中数学联合竞赛加试（A 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一．（本题满分 40 分） 如图，在等腰$\triangle ABC$中，$AB=BC$，I为内心，M为BI的中点，P为边AC上一点，满足$AP=3PC$，PI延长线上一点H满足$MH\perp PH$，Q为$\triangle ABC$的外接圆上劣弧AB的中点．证明：$BH\perp QH$．

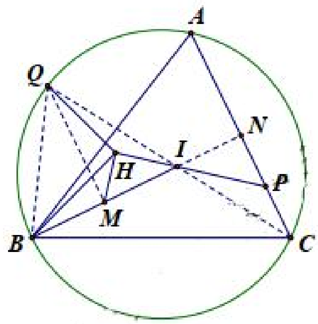


证明：取AC的中点N．由$AP=3PC$，可知P为NC的中点．易知B,I,N共线，$\angle INC=90^\circ$．

由I为$\triangle ABC$的内心，可知CI经过点Q，且

$$\angle QIB=\angle IBC+\angle ICB=\angle ABI+\angle ACQ=\angle ABI+\angle ABQ=\angle QBI,$$

又M为BI的中点，所以$QM\perp BI$．进而$QM\parallel CN$． ……………10 分



考虑$\triangle HMQ$与$\triangle HIB$．由于$MH\perp PH$，故$\angle HMQ=90^\circ-\angle HMI=\angle HIB$．

又$\angle IHM=\angle INP=90^\circ$，故$\dfrac{HM}{HI}=\dfrac{NP}{NI}$，于是

$$\frac{HM}{HI}=\frac{NP}{NI}=\frac{1}{2}\cdot\frac{NC}{NI}=\frac{1}{2}\cdot\frac{MQ}{MI}=\frac{MQ}{IB}.$$

所以$\triangle HMQ\backsim\triangle HIB$，得$\angle HQM=\angle HBI$． ……………30 分

从而H,M,B,Q四点共圆．于是有$\angle BHQ=\angle BMQ=90^\circ$，即$BH\perp QH$．

二．（本题满分 40 分）给定整数$n\geq 3$．设$a_1,a_2,\cdots,a_{2n},b_1,b_2,\cdots,b_{2n}$是$4n$个非负实数，满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}>0,$$

且对任意$i=1,2,\cdots,2n$，有$a_ia_{i+2}\geq b_i+b_{i+1}$（这里$a_{2n+1}=a_1,a_{2n+2}=a_2,b_{2n+1}=b_1$）.

求$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}$的最小值.

解：记$S=a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}$.

不失一般性，设$T=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}\leq\frac{S}{2}$.

当$n=3$时，因为

$$T^2-3\cdot\sum_{k=1}^{3}a_{2k-1}a_{2k+1}=\frac{1}{2}\left[(a_1-a_3)^2+(a_3-a_5)^2+(a_5-a_1)^2\right]\geq 0,$$

故结合条件可知

$$\frac{S^2}{4}\geq T^2\geq 3\cdot\sum_{k=1}^{3}a_{2k-1}a_{2k+1}\geq 3\cdot\sum_{k=1}^{3}(b_{2k-1}+b_{2k})=3S.$$

又$S>0$，所以$S\geq 12$.

当$a_i=b_i=2\,(1\leq i\leq 6)$时，$S$取到最小值 12. ……………10 分

当$n\geq 4$时，一方面有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}a_{2k+1}\geq\sum_{k=1}^{n}(b_{2k-1}+b_{2k})=S.$$

另一方面，若n为偶数，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}a_{2k+1}\leq(a_1+a_5+\cdots+a_{2n-3})(a_3+a_7+\cdots+a_{2n-1})\leq\frac{T^2}{4},$$

其中第一个不等式是因为$(a_1+a_5+\cdots+a_{2n-3})(a_3+a_7+\cdots+a_{2n-1})$展开后每一项均非负，且包含$a_{2k-1}a_{2k+1}(1\leq k\leq n)$这些项，第二个不等式利用了基本不等式.

……………20 分

若n为奇数，不妨设$a_1\leq a_3$，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}a_{2k+1}\leq\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k-1}a_{2k+1}\right)+a_{2n-1}a_3$$

$$\leq(a_1+a_5+\cdots+a_{2n-1})(a_3+a_7+\cdots+a_{2n-3})\leq\frac{T^2}{4}.$$

从而总有$S\leq\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}a_{2k+1}\leq\frac{T^2}{4}\leq\frac{S^2}{16}$. 又$S>0$，所以$S\geq 16$.

……………30 分

当$a_1=a_2=a_3=a_4=4,a_i=0(5\leq i\leq 2n),b_1=0,b_2=16,b_i=0(3\leq i\leq 2n)$时，$S$取到最小值 16.

综上，当$n=3$时，S的最小值为 12；当$n\geq 4$时，S的最小值为 16.

……………40 分

三．（本题满分 50 分） 设 $a_1=1, a_2=2, a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}, n=3,4,\cdots$．证明：对整数 $n\geq 5$，a_n 必有一个模 4 余 1 的素因子．

证明：记 $\alpha=1+\sqrt{2}, \beta=1-\sqrt{2}$，则易求得 $a_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$．

记 $b_n=\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}$，则数列 $\{b_n\}$ 满足

$$b_n=2b_{n-1}+b_{n-2}\,(n\geq 3). \qquad ①$$

因 $b_1=1, b_2=3$ 均为整数，故由①及数学归纳法，可知 $\{b_n\}$ 每项均为整数．

……………10 分

由 $\left(\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\left(\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2=(\alpha\beta)^n$，可知

$$b_n^2-2a_n^2=(-1)^n\ (n\geq 1). \qquad ②$$

……………20 分

当 $n>1$ 为奇数时，由于 a_1 为奇数，故由 $\{a_n\}$ 的递推式及数学归纳法，可知 a_n 为大于 1 的奇数，所以 a_n 有奇素因子 p．由②得 $b_n^2\equiv -1\pmod p$，故

$$b_n^{p-1}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\pmod p.$$

又上式表明 $(p,b_n)=1$，故由费马小定理得 $b_n^{p-1}\equiv 1\pmod p$，从而

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\pmod p.$$

因 $p>2$，故必须 $(-1)^{\frac{p-1}{2}}=1$，因此 $p\equiv 1\pmod 4$． ……………30 分

另一方面，对正整数 m,n，若 $m\mid n$，设 $n=km$，则

$$a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta}\cdot(\alpha^{(k-1)m}+\alpha^{(k-2)m}\beta^m+\cdots+\alpha^m\beta^{(k-2)m}+\beta^{(k-1)m})$$

$$=\begin{cases} a_m\cdot\sum\limits_{i=0}^{l-1}(\alpha\beta)^{im}(\alpha^{(2l-1-2i)m}+\beta^{(2l-1-2i)m}), & k=2l,\\ a_m\cdot\left(\sum\limits_{i=0}^{l-1}(\alpha\beta)^{im}(\alpha^{(2l-2i)m}+\beta^{(2l-2i)m})+(\alpha\beta)^{lm}\right), & k=2l+1.\end{cases}$$

因 $\alpha^s+\beta^s=2b_s$ 为整数（对正整数 s），$\alpha\beta=-1$ 为整数，故由上式知 a_n 等于 a_m 与一个整数的乘积，从而 $a_m\mid a_n$．

因此，若 n 有大于 1 的奇因子 m，则由前面已证得的结论知 a_m 有素因子 $p\equiv 1\pmod 4$，而 $a_m\mid a_n$，故 $p\mid a_n$，即 a_n 也有模 4 余 1 的素因子．

……………40 分

最后，若 n 没有大于 1 的奇因子，则 n 是 2 的方幂．设 $n=2^l\ (l\geq 3)$，因 $a_8=408=24\times 17$ 有模 4 余 1 的素因子 17，对于 $l\geq 4$，由 $8\mid 2^l$ 知 $a_8\mid a_{2^l}$，从而 a_{2^l} 也有素因子 17．证毕． ……………50 分

四．（本题满分 50 分）给定凸 20 边形P．用P的 17 条在内部不相交的对角线将P分割成 18 个三角形，所得图形称为P的一个三角剖分图．对P的任意一个三角剖分图T，P的 20 条边以及添加的 17 条对角线均称为T的边．T的任意 10条两两无公共端点的边的集合称为T的一个完美匹配．当T取遍P的所有三角剖分图时，求T的完美匹配个数的最大值．

解：将 20 边形换成$2n$边形，考虑一般的问题

对凸$2n$边形P的一条对角线，若其两侧各有奇数个P的顶点，称其为奇弦，否则称为偶弦．首先注意下述基本事实：

对P的任意三角剖分图T，T的完美匹配不含奇弦．(*)

如果完美匹配中有一条奇弦e_1，因为T的一个完美匹配给出了P的顶点集的一个配对划分，而e_1两侧各有奇数个顶点，故该完美匹配中必有T的另一条边e_2，端点分别在e_1的两侧，又P是凸多边形，故e_1与e_2在P的内部相交，这与T是三角剖分图矛盾．　　　　……………10 分

记$f(T)$为T的完美匹配的个数．设$F_1=1$，$F_2=2$，对$k\geq 2$，$F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$，是 Fibonacci 数列．

下面对n归纳证明：若T是凸$2n$边形的任意一个三角剖分图，则$f(T)\leq F_n$．

设$P=A_1A_2\cdots A_{2n}$是凸$2n$边形．从P的$2n$条边中选n条边构成完美匹配，恰有两种方法，$A_1A_2,A_3A_4,\cdots,A_{2n-1}A_{2n}$或$A_2A_3,A_4A_5,\cdots,A_{2n-2}A_{2n-1},A_{2n}A_1$．

当$n=2$时，凸四边形P的三角剖分图T没有偶弦，因此T的完美匹配只能用P的边，故$f(T)=2=F_2$．

当$n=3$时，凸六边形P的三角剖分图T至多有一条偶弦．若T没有偶弦，同上可知$f(T)=2$．若T含有偶弦，不妨设是A_1A_4，选用A_1A_4的完美匹配是唯一的，另两条边只能是A_2A_3,A_5A_6，此时$f(T)=3$．总之$f(T)\leq 3=F_3$．

结论在$n=2,3$时成立．假设$n\geq 4$，且结论在小于n时均成立．考虑凸$2n$边形$P=A_1A_2\cdots A_{2n}$的一个三角剖分图T．若T没有偶弦，则同上可知$f(T)=2$．

对于偶弦e，记e两侧中P的顶点个数的较小值为$w(e)$．若T含有偶弦，取其中一条偶弦e使$w(e)$达到最小．设$w(e)=2k$，不妨设e为$A_{2n}A_{2k+1}$，则每个A_i $(i=1,2,\cdots,2k)$不能引出偶弦．

事实上，假设A_iA_j是偶弦，若$j\in\{2k+2,2k+3,\cdots,2n-1\}$，则$A_iA_j$与$e$在$P$的内部相交，矛盾．若$j\in\{1,2,\cdots,2k+1,2n\}$，则$w(A_iA_j)<2k$，与$w(e)$的最小性矛盾．

又由（*）知完美匹配中没有奇弦，故$A_1,A_2,\cdots,A_{2k}$只能与其相邻顶点配对，特别地，A_1只能与A_2或A_{2n}配对．下面分两种情况．

情形 1：选用边A_1A_2．则必须选用边$A_3A_4,\cdots,A_{2k-1}A_{2k}$．注意到$A_{2n}A_{2k+1}$的两侧分别有$2k,2n-2k-2$个顶点，$2n-2k-2\geq w(A_{2n}A_{2k+1})=2k$，而$n\geq 4$，因此

4

$2n-2k\ge 6$．在凸 $2n-2k$ 边形 $P_1=A_{2k+1}A_{2k+2}\cdots A_{2n}$ 上，T 的边给出了 P_1 的三角剖分图 T_1，在 T 中再选取 $n-k$ 条边 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-k}$，与 $A_1A_2,A_3A_4,\cdots,A_{2k-1}A_{2k}$ 一起构成 T 的完美匹配，当且仅当 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-k}$ 是 T_1 的完美匹配．故情形 1 中的 T 的完美匹配个数等于 $f(T_1)$．　　……………20 分

情形 2：选用边 A_1A_{2n}．则必须选用边 $A_2A_3,\cdots,A_{2k}A_{2k+1}$．在凸 $2n-2k-2$ 边形 $P_2=A_{2k+2}A_{2k+3}\cdots A_{2n-1}$ 中构造如下的三角剖分图 T_2：对 $2k+2\le i<j\le 2n-1$，若线段 A_iA_j 是 T 的边，则也将其作为 T_2 的边．由于这些边在内部互不相交，因此可再适当地添加一些 P_2 的对角线，得到一个 P_2 的三角剖分图 T_2，它包含了 T 的所有在顶点 $A_{2k+2},A_{2k+3},\cdots,A_{2n-1}$ 之间的边．因此每个包含边 $A_{2n}A_1,A_2A_3,\cdots,A_{2k}A_{2k+1}$ 的 T 的完美匹配，其余的边必定是 T_2 的完美匹配．故情形 2 中的 T 的完美匹配个数不超过 $f(T_2)$．

由归纳假设得 $f(T_1)\le F_{n-k}$，$f(T_2)\le F_{n-k-1}$，结合上面两种情形以及 $k\ge 1$，有

$$f(T)\le f(T_1)+f(T_2)\le F_{n-k}+F_{n-k-1}=F_{n-k+1}\le F_n.$$

……………40 分

下面说明等号可以成立．考虑凸 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的三角剖分图 Δ_n：添加对角线 $A_2A_{2n},A_{2n}A_3,A_3A_{2n-1},A_{2n-1}A_4,A_4A_{2n-2},\cdots,A_{n+3}A_n,A_nA_{n+2}$．重复前面的论证过程，$f(\Delta_2)=2$，$f(\Delta_3)=3$．对 Δ_n，$n\ge 4$，考虑偶弦 A_nA_3．情形 1，用 A_1A_2，由于在凸 $2n-2$ 边形 $A_3A_4\cdots A_{2n}$ 中的三角剖分图恰是 Δ_{n-1}，此时有 $f(\Delta_{n-1})$ 个 T 的完美匹配．情形 2，用 A_1A_{2n}，由于在凸 $2n-4$ 边形 $A_4A_5\cdots A_{2n-1}$ 中 T 的边恰构成三角剖分图 Δ_{n-2}，不用添加任何对角线，故这一情形下 T 的完美匹配个数恰为 $f(\Delta_{n-2})$．从而对 $n\ge 4$，有

$$f(\Delta_n)=f(\Delta_{n-1})+f(\Delta_{n-2}).$$

由数学归纳法即得 $f(\Delta_n)=F_n$．结论得证．

因此，对凸 20 边形 P，$f(T)$ 的最大值等于 $F_{10}=89$．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》