

2022-2023 学年第二学期期初考试

高三数学参考答案

2023.2

1. D 2. B 3. B 4. C 5. A 6. B 7. D 8. A
9. ABD 10. BC 11. BCD 12. ACD
13. 28 14. $\frac{1}{5}$ 15. $\frac{3}{25}$ 16. $[-\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}]$

17. 解: (1) $\because S_n = a_{n+1} - 2 \quad \therefore S_{n-1} = a_n - 2 \quad (n \geq 2)$,

两式相减得 $a_{n+1} = 2a_n \quad (n \geq 2)$ 2 分

$\because a_1 = 2, a_2 = 4 \quad \therefore a_2 = 2a_1$ 3 分

$\therefore a_{n+1} = 2a_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$\because a_1 = 2 \neq 0 \quad \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列

$\therefore a_n = 2^n$; 5 分

说明: 结果 $a_n = 2^n$ 对, 但漏掉 $a_2 = 2a_1$ 的扣 1 分

(2) 由 (1) 可知 $b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^n = n$

若选①: $c_n = b_n \cdot a_n = n \cdot 2^n$,

$\therefore T_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$

$2T_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$ 7 分

两式相减得: $-T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = \frac{2-2^{n+1}}{1-2} - n \cdot 2^{n+1}$,

所以 $T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ 10 分

若选②: $c_n = \frac{1}{4b_n^2 - 1} = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ 7 分

$T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$ 10 分

若选③: $c_n = (-1)^n \cdot (b_n)^2 = (-1)^n \cdot n^2$

当 n 为偶数时, $T_n = (-1^2 + 2^2) + (-3^2 + 4^2) + \cdots + [-(n-1)^2 + n^2] = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 7 分

当 n 为奇数时, $T_n = T_{n+1} - c_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+1)^2 = -\frac{n(n+1)}{2}$ 10 分

综上得: $T_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ 10 分



说明：没有“綜上得”不扣分

18. 解：(1) 在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得： $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{2\pi}{3}$

$\therefore a^2 = 100 + 36 + 60 = 196$ ，即 $a = 14$ 3 分

设内切圆 I 的半径为 r ，则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot (a+b+c) \cdot r = \frac{1}{2} bc \sin \frac{2\pi}{3}$

$\therefore r = \sqrt{3}$ $\therefore S = \pi r^2 = 3\pi$ 6 分

(2) 法 1：在 $\triangle ABC$ 中，由 (1) 结合余弦定理得 $\cos \angle ABC = \frac{11}{14}$ ，

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ， $\therefore$ 点 D 到 AB, BC 的距离相等，故 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}} = \frac{AB}{BC}$ ，

而 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}} = \frac{AD}{CD}$ ， $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{3}{7}$ $\therefore \vec{BD} = \frac{7}{10} \vec{BA} + \frac{3}{10} \vec{BC}$ 9 分

$\therefore \vec{BD} \cdot \vec{BC} = \frac{7}{10} \vec{BA} \cdot \vec{BC} + \frac{3}{10} \vec{BC}^2 = \frac{7}{10} \times 6 \times 14 \times \frac{11}{14} + \frac{3}{10} \times 14^2 = 105$ 12 分

法 2：在 $\triangle ABC$ 中，由 (1) 结合余弦定理得 $\cos \angle ABC = \frac{11}{14}$ ，

依题意可知 I 为内心，故 BD 平分 $\angle ABC$ ，设 $\angle ABD = \angle CBD = \theta$

则 $\cos \angle ABC = 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{11}{14}$ ， $\therefore \cos \theta = \frac{5\sqrt{7}}{14}$ ， $\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{21}}{14}$ 8 分

思路 1：在 $\triangle ABD$ 中， $\angle ADB = \frac{\pi}{3} - \theta$ ，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{AB}{\sin(\frac{\pi}{3} - \theta)}$ (**)

$\therefore \sin(\frac{\pi}{3} - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{\sqrt{21}}{7}$

$\therefore$ (**) 得 $BD = \frac{AB}{\sin(\frac{\pi}{3} - \theta)} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{6}{\frac{\sqrt{21}}{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{7}$ 10 分

$\therefore \vec{BD} \cdot \vec{BC} = |\vec{BD}| \cdot |\vec{BC}| \cos \theta = 105$ 12 分

思路 2： $\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD}$ $\therefore \frac{1}{2} ac \sin 2\theta = \frac{1}{2} c \cdot BD \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} a \cdot BD \cdot \sin \theta$

$\therefore BD = \frac{2ac \cos \theta}{a+c} = \frac{2 \times 6 \times 14 \times \frac{5\sqrt{7}}{14}}{6+14} = 3\sqrt{7}$ 10 分

$\therefore \vec{BD} \cdot \vec{BC} = |\vec{BD}| \cdot |\vec{BC}| \cos \theta = 105$ 12 分

思路 3： $\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ， $\therefore$ 点 D 到 AB, BC 的距离相等，故 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}} = \frac{AB}{BC}$

而 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}} = \frac{AD}{CD}$ ， $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{6}{14}$ $\therefore BD = 10, \therefore AD = 3$

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 3\sqrt{7}$ 10 分

$\therefore \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos \theta = 105$ 12 分

19. 解: (1) 连接 A_1O , 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 ACC_1A_1 是菱形, $\angle A_1AC = 60^\circ$,

则 $\triangle AA_1C$ 为正三角形, 取 AC 中点为 O , 则 $AC \perp A_1O$,

又 $AC \perp A_1B$, $A_1B \cap A_1O = A_1$, $A_1B, A_1O \subset$ 平面 A_1BO ,

所以 $AC \perp$ 平面 A_1BO , 3 分

因为 $BO \subset$ 平面 A_1BO , 所以 $AC \perp BO$,

因为 O 是 AC 中点, 所以 $AB = BC$ 5 分

(2) 在边长为 2 的正 $\triangle AA_1C$ 中, $A_1O = \sqrt{3}$,

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC = \sqrt{2}$, $AC = 2$, 则 $BO = 1$, 又 $A_1B = 2$,

所以 $A_1O^2 + BO^2 = A_1B^2$, 所以 $A_1O \perp BO$, 7 分

所以 OA_1, OB, OC 两两垂直.

以 O 为原点, OB, OC, OA_1 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

则 $A(0, -1, 0), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), A_1(0, 0, \sqrt{3})$,

$\overrightarrow{A_1B} = (1, 0, -\sqrt{3}), \overrightarrow{A_1C} = (0, 1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$,

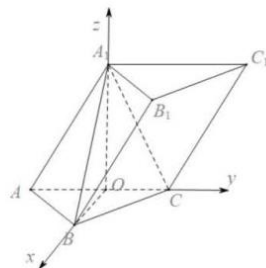
设平面 A_1B_1C 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_1B} \cdot \vec{n} = x + y = 0 \\ \overrightarrow{A_1C} \cdot \vec{n} = y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } z = 1, \text{ 则 } \vec{n} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1) \text{ 10 分}$$

设直线 A_1B 与平面 A_1B_1C 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{A_1B}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{A_1B} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{A_1B}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

所以, 直线 A_1B 与平面 A_1B_1C 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 12 分



20. 解: (1) 因为 $\hat{y} = e^{\hat{b}x + \hat{a}}$, 所以 $\ln \hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 1 分

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i \ln y_i) - \bar{x} \sum_{i=1}^5 \ln y_i}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{112.85 - 3 \times 36.33}{1 + 4 + 9 + 16 + 25 - 5 \times 3^2} = \frac{3.86}{10} = 0.386, \text{ 4 分}$$

$$\text{所以 } \hat{a} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \ln y_i - \hat{b}\bar{x} = \frac{1}{5} \times 36.33 - 0.386 \times 3 = 6.108,$$

$$\text{所以 } \hat{y} = e^{\hat{b}x + \hat{a}} = e^{0.386x + 6.108}. \text{ 6 分}$$

(2) 未引入云算力辅助前, $\varepsilon \sim N(0, \frac{4}{m})$, 所以 $\mu=0, \sigma=\sqrt{\frac{4}{m}}$,

又 $P(-1 < \varepsilon < 1) = 0.6827 = P(|\varepsilon - \mu| < \sigma)$, 所以 $\sqrt{\frac{4}{m}} = 1$, 所以 $m = 4$ 8分

引入云算力辅助后, $\varepsilon \sim N(0, \frac{1}{m})$, 所以 $\mu=0, \sigma=\sqrt{\frac{1}{m}}$,

若保持产品成本不变, 则 $m = 4$, $\varepsilon \sim N(0, \frac{1}{4})$, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$,

所以 $P(-1 < \varepsilon < 1) = P(|\varepsilon - \mu| < 2\sigma) = 0.9545$ 10分

若产品质量不变, 则 $\sqrt{\frac{1}{m}} = 1$, 所以 $m = 1$,

所以单件产品成本可以下降 $4 - 1 = 3$ 元. 12分

21. 解: (1) 设 $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, 则由题意得 $\begin{cases} AB = x_A + x_B + p = 8 \\ \frac{x_A + x_B}{2} = 3 \end{cases}$, 故 $p = 2$,

所以抛物线的方程为 $y^2 = 4x$ 4分

(2) 直线 AB 过定点 $(1, 0)$, 证明如下:

设 $C(-1, c)$, $A(\frac{y_1^2}{4}, y_1)$, $B(\frac{y_2^2}{4}, y_2)$, 直线 AB 的方程: $x = ty + n (n > 0)$,

将 $x = ty + n (n > 0)$ 代入 $y^2 = 4x$ 得 $y^2 - 4ty - 4n = 0$,

则 $\Delta > 0$, 所以 $y_1 + y_2 = 4t$, $y_1 y_2 = -4n$, 6分

所以 $\overrightarrow{CA} = (\frac{y_1^2}{4} + 1, y_1 - c)$, $\overrightarrow{CB} = (\frac{y_2^2}{4} + 1, y_2 - c)$,

因为 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, 即 $\frac{y_1^2 y_2^2}{16} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{4} + 1 + y_1 y_2 - c(y_1 + y_2) + c^2 = 0$,

即 $n^2 + 4t^2 + 2n + 1 - 4n - 4tc + c^2 = 0$, 8分

即 $(n-1)^2 + (2t-c)^2 = 0$, 所以 $n=1$,

所以直线 AB 过定点 $(1, 0)$ 12分

22. 解: (1) $h(x) = qf(x) - g(x) = ae^{x+2} - \cos x$, $h'(x) = ae^{x+2} + \sin x$.

因为 $h(x) = qf(x) - g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调减,

所以 $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $h'(x) = ae^{x+2} + \sin x \leq 0$ 恒成立,

所以 $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $a \leq -\frac{\sin x}{e^{x+2}}$ 恒成立. 2分

设 $M(x) = -\frac{\sin x}{e^{x+2}}$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则 $M'(x) = -\frac{\cos x - \sin x}{e^{x+2}} = \frac{\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})}{e^{x+2}}$,

第 4 页 (共 6 页)



当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ 时, $M'(x) < 0$, 当 $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 时, $M'(x) > 0$,

所以 $M(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ 上单调递减, 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 4 分

$$\text{所以 } M(x)_{\min} = M(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{\frac{\pi}{4}+2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}-2},$$

所以 $a \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}-2}$ 5 分

(2) 存在且仅有一条直线同时与 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 的图象相切. 6 分

设直线与 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 的图象分别相切于点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

其中 $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 且 $x_1 \neq x_2$, $f'(x) = e^{x+2}$, $g'(x) = -\sin x$,

则在 P 处的切线方程为: $y - e^{x_1+2} = e^{x_1+2}(x - x_1)$, 即 $y = e^{x_1+2}x + (1 - x_1)e^{x_1+2}$;

在 Q 处的切线方程为: $y - \cos x_2 = -\sin x_2(x - x_2)$, 即 $y = -x \sin x_2 + \cos x_2 + x_2 \sin x_2$.

所以 $e^{x_1+2} = -\sin x_2$, ... ①

$(1 - x_1)e^{x_1+2} = \cos x_2 + x_2 \sin x_2$, ... ②

因为 $-\sin x_2 \in (-1, 1)$, 所以 $0 < e^{x_1+2} < 1$, 则 $x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

可得 $x_1 = -2 + \ln(-\sin x_2)$, 于是有 $[3 - \ln(-\sin x_2)](-\sin x_2) = \cos x_2 + x_2 \sin x_2$,

整理得 $(x_2 + 3)\sin x_2 + \cos x_2 - \sin x_2 \ln(-\sin x_2) = 0$ 8 分

法 1: 两边同除以 $\sin x_2$ 得 $(x_2 + 3) + \frac{\cos x_2}{\sin x_2} - \ln(-\sin x_2) = 0$,

要证有且仅有一条直线同时与 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 的图象都相切,

只需证函数 $M(x) = x + 3 + \frac{\cos x}{\sin x} - \ln(-\sin x)$, 在 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 上有且仅有一个零点.

$$M'(x) = 1 + \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{-\cos x(\sin x + \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{-\sqrt{2} \cos x \sin(x + \frac{\pi}{4})}{\sin^2 x}$$

当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ 时, $M'(x) > 0$, 当 $x \in (-\frac{\pi}{4}, 0)$ 时, $M'(x) < 0$,

所以 $M(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 上单调递减, 10 分

$M(-\frac{\pi}{4}) > M(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} + 3 > 0$, 所以 $M(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ 上无零点.

取 $\sin x_0 = -e^{-3}$, $x_0 \in (-\frac{\pi}{4}, 0)$, 则 $\cos x_0 = \sqrt{1 - e^{-6}}$,

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线