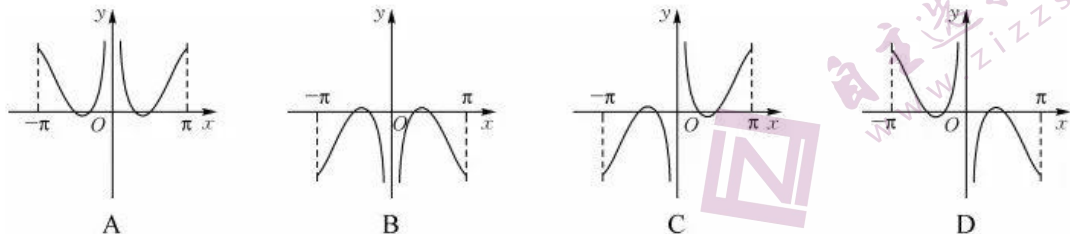


7. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx + 3$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 若 $f(2) = 5$, 则 $f(-2) =$

- A. 4
B. 3
C. 2
D. 1

8. 函数 $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \cos x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$ 且 $x \neq 0$) 的图象可能为



9. 若偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, $a = f(\log_2 3)$, $b = f(\log_4 5)$, $c = f(2^{\frac{3}{2}})$, 则 a, b, c 满足

- A. $a < b < c$
B. $b < a < c$
C. $c < a < b$
D. $c < b < a$

10. 已知函数 $f(x)$ 满足: 当 $x \leq a$ 时, $f(x) = x^3 - x$, 且 $f(a+x) = f(a-x)$. 若函数 $f(x)$ 恰有 5 个零点, 则 $a =$

- A. -2
B. -1
C. 0
D. 1

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (a-2)x - 3a + 1, & x \leq 3, \\ 2a^{x-2}, & x > 3 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 若 $f(x)$ 有最小值, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(0, \frac{5}{6}]$
B. $(1, \frac{5}{4})$
C. $(0, \frac{5}{6}] \cup (1, \frac{5}{4}]$
D. $(0, 1) \cup [\frac{5}{4}, +\infty)$

12. 已知定义在 \mathbf{R} 上的连续奇函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) + \frac{f(x)}{x} > 0$, 则使得 $2xf(2x) + (1-3x)f(3x-1) > 0$ 成立的 x 的取值范围是

- A. $(1, +\infty)$
B. $(\frac{1}{5}, 1)$
C. $(-1, \frac{1}{5}) \cup (1, +\infty)$
D. $(-\infty, 1)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = (x+1)(x+a)x^3$ 为 \mathbf{R} 上的偶函数, 则 $a =$ _____.

14. 若函数 $y = 2x^3 + 1$ 与 $y = 3x^2 - b$ 的图象在一个公共点处的切线相同, 则实数 $b =$ _____.

15. 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x$ 在区间 $(0, e]$ 上的最大值是 _____.

16. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 若 $f(2+x) = f(-x)$, $f(1) = 3$, 则 $f(201)$ _____.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \sqrt{4^x - 32}$ 的定义域为集合 A , 集合 $B = \{x | x^2 + ax - 6 < 0\}$.

(1) 若 $a = -5$, 求 $A \cap B$;

(2) 若 $3 \notin B$, 且 $-2 \notin B$, 求 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$.

18. (本小题满分 12 分)

已知 p : 函数 $y = \ln(mx^2 - 4x + m)$ 的定义域为 \mathbf{R} , q : 存在 $x \in [0, \frac{1}{2}]$, 使得不等式 $x^2 - x + m - \frac{5}{4} \geq 0$ 成立.

(1) 若 p 为真, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 $(\neg p) \vee q$ 为真且 $(\neg p) \wedge q$ 为假, 求实数 m 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \log_a(x-a) + \log_a(x-3a)$, 其中 $a > 0$, 且 $a \neq 1$.

(1) 若 $f(1) = 1$, 求 a 的值;

(2) 若 $a = 2$, 求不等式 $f(x) < \log_4 49 - \log_2 \frac{1}{3}$ 的解集.

20. (本小题满分 12 分)

已知实数 a 满足 $1 < a \leq 2$, 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a+1}{2}x^2 + ax$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求 $f(x)$ 的极小值;

(2) 若函数 $g(x) = 4x^3 + 3bx^2 - 6(b+2)x$ ($b \in \mathbf{R}$) 与 $f(x)$ 的极小值点相等, 证明: $g(x)$ 的极大值不大于 10.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2(x-1)e^x$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 求 $f(a)$ 的取值范围;

(2) 设函数 $g(x) = e^x - x + p$, 若存在 $x_0 \in [1, e]$, 使不等式 $g(x_0) \geq f(x_0) - x_0$ 成立, 求实数 p 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

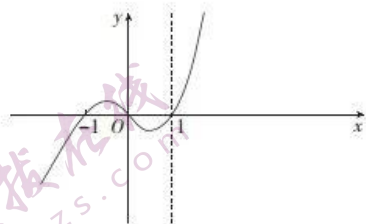
已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2, g(x) = \ln x$.

(1) 设函数 $F(x) = f(x) - g(x)$, 求 $F(x)$ 的单调区间;

(2) 若存在常数 k, m , 使得 $f(x) \geq kx + m$, 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 且 $g(x) \leq kx + m$, 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则称直线 $y = kx + m$ 为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的“分界线”, 试问: $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否存在“分界线”? 若存在, 求出“分界线”的方程; 若不存在, 请说明理由.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. B 根据命题的否定可知, $\neg p$ 为 $\exists x \geq 1, \ln x < \sqrt{x} + 1$. 故选 B.
2. A 因为 $B = \{-1, 2, 5, 8, \dots\}$, 所以 $A \cap B = \{2, 5\}$. 故选 A.
3. C 当 $a < 0$ 时, 由 $f(a) = 3$, 得 $-\frac{3}{a} = 3$, 解得 $a = -1$, 符合题意; 当 $a > 0$ 时, 由 $f(a) = 3$, 得 $\log_3 a = 3$, 解得 $a = 27$, 符合题意. 综上可得 $a = -1$ 或 $a = 27$. 故选 C.
4. A 由 $f(x) = 2x^3 + x^2 f'(1) + \ln x$, 得 $f'(x) = 6x^2 + 2x f'(1) + \frac{1}{x}$, 则 $f'(1) = 6 + 2f'(1) + 1$, 解得 $f'(1) = -7$, 则 $f'(x) = 6x^2 - 14x + \frac{1}{x}$, 所以 $f'(2) = -\frac{7}{2}$. 故选 A.
5. C 设该小区内公共场所声音的强度水平为 L_1, L_2 , 相应声音的强度为 I_1, I_2 , 由题意, 得 $L_1 - L_2 = 10$, 即 $10 \lg \frac{I_1}{I_0} - 10 \lg \frac{I_2}{I_0} = 10$, 解得 $I_2 = \frac{1}{10} I_1$. 故选 C.
6. A 由 $\ln a < \ln b$, 可得 $0 < a < b$, 所以 $a^{\frac{1}{3}} < b^{\frac{1}{3}}$, 所以充分性成立; 当 $a^{\frac{1}{3}} < b^{\frac{1}{3}}$ 时, 在 $a < b < 0$ 的情况下, $\ln a < \ln b$ 不成立, 所以必要性不成立. 故“ $\ln a < \ln b$ ”是“ $a^{\frac{1}{3}} < b^{\frac{1}{3}}$ ”的充分不必要条件. 故选 A.
7. D 令 $g(x) = ax^2 + bx$, 则 $g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 又 $f(2) = 3$, 所以 $g(2) + 3 = 5$, 所以 $g(2) = 2$, 所以 $f(-2) = g(-2) + 3 = -2 - 3 = -1$. 故选 D.
8. D $\because f(-x) = (-x + \frac{1}{x}) \cos(-x) = -(x - \frac{1}{x}) \cos x = -f(x)$, \therefore 函数 $f(x)$ 为奇函数, \therefore 函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称, 故排除 A, B; 当 $x = \pi$ 时, $f(\pi) = (\pi - \frac{1}{\pi}) \cos \pi = \frac{1}{\pi} - \pi < 0$, 故排除 C. 故选 D.
9. B \because 偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, $\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增. $\because 2 > \log_2 3 = \log_2 9 > \log_2 (5 \cdot 2^{\frac{1}{2}}) > 2$, $\therefore f(\log_2 5) < f(\log_2 3) < f(2^{\frac{3}{2}})$, $\therefore b < a < c$. 故选 B.
10. D 由 $f(a+x) = f(a-x)$ 知 $f(x)$ 的图象关于 $x = a$ 对称, 再结合 $y = x(x+1)(x-1)$ 的大致图象可知, $y = x^3 - x$ 有三个零点, 最大的零点为 1, 则 $a = 1$ 时 $y = f(x)$ 的图象恰好与 x 轴有 5 个零点. 故选 D.



11. C $\because f(x)$ 有最小值, 根据题意, 可得其最小值为 $f(3) = 6a - 5$, 则 $a - 2 \leq 0$, $\therefore \begin{cases} 1 < a \leq 2, \\ 6a - 5 \leq 2a \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 6a - 5 \leq 0, \end{cases}$ 解得 $1 < a \leq \frac{5}{4}$ 或 $0 < a \leq \frac{5}{6}$. \therefore 实数 a 的取值范围是 $(0, \frac{5}{6}] \cup (1, \frac{5}{4}]$. 故选 C.
12. B 当 $x > 0$ 时, $f'(x) + \frac{f(x)}{x} > 0 \Rightarrow x f'(x) + f(x) > 0$, 可得 $g(x) = x f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. · 恒正

所以 $2xf(2x) + (1-3x)f(3x-1) > 0$ 等价于 $g(2x) > g(3x-1)$, 可得 $|2x| > |3x-1|$, 平方得 $4x^2 > 9x^2 - 6x + 1$, 解得

$\frac{1}{5} < x < 1$. 故选 B. 来源微信公众号: 高三答案

13. -1 $\because y = x^4$ 为偶函数, $\therefore y = (x+1)(x+a) = x^2 + (a+1)x + a$ 为偶函数, 则 $-\frac{a+1}{2} = 0$, $\therefore a = -1$.

14. 0 或 -1 设公共切点的横坐标为 x_0 , 函数 $y = 2x^3 + 1$ 的导数为 $y' = 6x^2$, $y = 3x^2 - b$ 的导数为 $y' = 6x$. 由题意, 可得 $6x_0^3 = 6x_0, 1 + 2x_0^3 = 3x_0^2 - b$, 解得 $x_0 = 0, b = -1$ 或 $x_0 = 1, b = 0$. 则 $b = 0$ 或 -1 .

15. -1 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} - 1 = \frac{1 - x^2 - \ln x}{x^2}$, 设 $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$, 则 $g(x)$ 在 $(0, e]$ 上递减, $\because g(1) = 0$, \therefore 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) > 0$, 当 $x \in (1, e]$ 时, $g(x) < 0$. $\therefore f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上递增, 在 $(1, e]$ 上递减, $f(x)_{\max} = f(1) = -1$.

16. -3 $\because f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x)$. 又 $f(2+x) = f(-x)$, $\therefore f(2+x) = -f(x)$, $\therefore f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, \therefore 函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, $\therefore f(2018) + f(2019) = f(4 \times 504 + 2) + f(4 \times 504 + 3) = f(2) + f(3)$. 又 $f(2) = f(0) = 0, f(3) = f(-1) = -f(1) = -3$, $\therefore f(2018) + f(2019) = -3$.

17. 解: (1) 由 $4^x - 32 \geq 0$, 得 $2^{2x} \geq 2^5$, 则 $x \geq \frac{5}{2}$ 2分

$\because a = -5, \therefore B = \{x | x^2 - 5x - 6 < 0\} = \{x | -1 < x < 6\}$, 4分

$\therefore A \cap B = \{x | \frac{5}{2} \leq x < 6\}$ 5分

(2) $\because 3 \in B, 1, -2 \in B, \therefore 3 \in \complement_{\mathbb{R}} B, -2 \in \complement_{\mathbb{R}} B$ 6分

$\therefore \begin{cases} 9 + 3a - 6 \geq 0, \\ 4 - 2a - 6 \geq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a \geq -1, \\ a \leq -1. \end{cases} \therefore a = -1$, 8分

$\therefore B = \{x | -2 < x < 3\}$, 9分

$\therefore (\complement_{\mathbb{R}} A) \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \complement_{\mathbb{R}} (A \cup B) = \{x | x \leq -2\}$ 10分

18. 解: (1) 当 $m = 0$ 时, $y = \ln(-4x)$, 定义域 $(-\infty, 0)$, 不满足题意, 舍去; 1分

当 $m \neq 0$ 时, 要使 $y = \ln(mx^2 - 4x + m)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 则 $\begin{cases} m > 0, \\ \Delta = 16 - 4m^2 < 0, \end{cases}$ 解得 $m > 2$ 3分

综上可知: 实数 m 的取值范围是 $(2, +\infty)$ 4分

(2) q : 存在 $x \in [0, \frac{1}{2}]$, 使得不等式 $x^2 - x + m - \frac{5}{4} \geq 0$ 成立,

只需 $(x^2 - x + m - \frac{5}{4})_{\max} \geq 0$, 而 $x^2 - x + m - \frac{5}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 + m - \frac{3}{4}$, 所以当 $x = 0$ 时, $x^2 - x + m - \frac{5}{4}$ 取到最大值

$m - \frac{5}{4}$, 所以 $m - \frac{5}{4} \geq 0, m \geq \frac{5}{4}$.

即 q 为真时, 实数 m 的取值范围是 $m \geq \frac{5}{4}$ 6分

因为 $(\neg p) \vee q$ 为真且 $(\neg p) \wedge q$ 为假,

所以 $\neg p, q$ 一真一假, 所以 p, q 真假相同. 7分

当 p 假 q 假时, $\begin{cases} m \leq 2, \\ m < \frac{5}{4}, \end{cases}$ 此时 $m < \frac{5}{4}$;

当 p 真 q 真时, $\begin{cases} m > 2, \\ m \geq \frac{5}{4}, \end{cases}$ 此时 $m > 2$ 11 分

综上, 实数 m 的取值范围是 $(-\infty, \frac{5}{4}) \cup (2, +\infty)$ 12 分

19. 解: (1) $\because 1 > a$ 且 $1 > 3a, \therefore a < \frac{1}{3}$ 1 分

$\because f(1) = 1, \therefore \log_a(1-a) + \log_a(1-3a) = 1, \therefore (1-a)(1-3a) = a,$

即 $3a^2 - 5a + 1 = 0,$ 3 分

$\therefore a = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6},$ 又 $a < \frac{1}{3},$ 5 分

$\therefore a = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}.$ 6 分

(2) $\because a = 2, \therefore f(x) = \log_2(x-2) + \log_2(x-6)$ 的定义域为 $(6, +\infty),$ 7 分

由 $f(x) < \log_4 49 - \log_2 \frac{1}{3} = \log_2 21,$ 得 $\begin{cases} x^2 - 8x - 9 < 0, \\ x > 6, \end{cases}$ 10 分

解得 $6 < x < 9,$ 即所求不等式的解集为 $(6, 9).$ 12 分

20. (1) 解: 当 $a = 2$ 时, $f'(x) = x^2 - 3x - 2 = (x-1)(x-2),$ 列表如下:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

..... 4 分

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(2) = \frac{2}{3}.$ 6 分

(2) 证明: $f'(x) = x^2 - (a+1)x + a = (x-1)(x-a),$

由于 $a > 1,$ 所以当 $x = a$ 时, $f(x)$ 取极小值,

所以 $g(a)$ 为 $g(x)$ 的极小值,

而 $g'(x) = 12x^2 + 6bx - 6(b+2) = 6(x-1)(2x+b+2),$

所以 $a = -\frac{b+2}{2},$ 即 $b = -2(a+1),$

又因为 $1 < a \leq 2,$ 所以 $g(x)$ 极大值 $= g(1) = 4 + 3b - 6(b+2) = -3b - 8 = 6a - 2 \leq 10.$

故 $g(x)$ 的极大值不大于 10. 12 分

21. 解: (1) 由 $f'(x) = 2xe^x > 0$ 得 $x > 0,$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore a \geq 0, \therefore f(a) \geq f(0) = -2,$

$\therefore f(a)$ 的取值范围是 $[-2, +\infty).$ 4 分

(2) \because 存在 $x_0 \in [1, e],$ 使不等式 $g(x_0) \geq 2(x_0 - 1)e^{x_0} - x_0$ 成立,

\therefore 存在 $x_0 \in [1, e],$ 使 $p \geq (2x_0 - 3)e^{x_0}$ 成立.

令 $h(x) = (2x - 3)e^x,$ 从而 $p \geq h(x)_{\min} (x \in [1, e]),$

- $h'(x) = (2x-1)e^x$, 8分
- $\because x \geq 1, \therefore 2x-1 \geq 1, e^x > 0, \therefore h'(x) > 0,$
- $\therefore h(x) = (2x-3)e^x$ 在 $[1, e]$ 上单调递增. 10分
- $\therefore h(x)_{\min} = h(1) = -e, \therefore p \geq -e.$
- \therefore 实数 p 的取值范围为 $[-e, +\infty)$ 12分

22. 解: (1) 由于函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2, g(x) = \ln x$, 来源微信公众号: 高三答案

- 因此 $F(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$.
- 则 $F'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{(x-\sqrt{e})(x+\sqrt{e})}{x}, x \in (0, +\infty)$ 1分

- 当 $0 < x < \sqrt{e}$ 时, $F'(x) < 0, \therefore F(x)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 上是减函数;
- 当 $x > \sqrt{e}$ 时, $F'(x) > 0, \therefore F(x)$ 在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上是增函数. 3分
- 因此, 函数 $F(x)$ 的单调减区间是 $(0, \sqrt{e})$, 单调增区间是 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 4分

- (2) 由(1)可知, 当 $x = \sqrt{e}$ 时, $F(x)$ 取得最小值 $F(\sqrt{e}) = 0$,
- 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在 $x = \sqrt{e}$ 处有公共点 $(\sqrt{e}, \frac{e}{2})$ 5分

- 假设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 存在“分界线”, 则其必过点 $(\sqrt{e}, \frac{e}{2})$.
- 故设其方程为: $y - \frac{e}{2} = k(x - \sqrt{e})$, 即 $y = kx + \frac{e}{2} - k\sqrt{e}$ 7分

- 由 $f(x) \geq kx + \frac{e}{2} - k\sqrt{e}$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,
- 则 $x^2 - 2kx - e + 2k\sqrt{e} \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,
- $\therefore \Delta = 4k^2 - 4(2k\sqrt{e} - e) = 4(k - \sqrt{e})^2 \leq 0$ 成立,
- 因此 $k = \sqrt{e}$, “分界线”的方程为 $y = \sqrt{e}x - \frac{e}{2}$ 9分

下面证明 $g(x) \leq \sqrt{e}x - \frac{e}{2}$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

- 设 $G(x) = \ln x - \sqrt{e}x + \frac{e}{2}$, 则 $G'(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}(\sqrt{e}-x)}{x}$,
- \therefore 当 $0 < x < \sqrt{e}$ 时, $G'(x) > 0$, 当 $x > \sqrt{e}$ 时, $G'(x) < 0$,
- 当 $x = \sqrt{e}$ 时, $G(x)$ 取得最大值 0,
- 则 $g(x) \leq \sqrt{e}x - \frac{e}{2}$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立. 11分

故所求“分界线”的方程为 $y = \sqrt{e}x - \frac{e}{2}$ 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线