2023年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

文科数学

本试卷总分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $I=\{x\in\mathbf{N}|x\leqslant 10\}$,集合 $M=\{1,2,3\}$,$N=\{2,4,6,8,10\}$,则 $\complement_I(M\cup N)=$

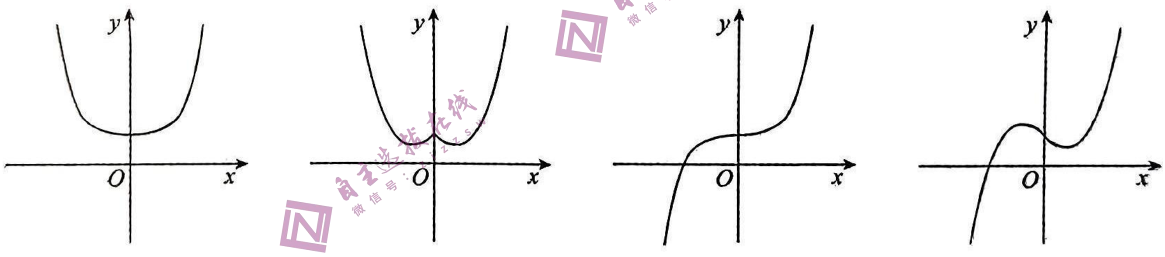
A. $\{5,7,9\}$　　B. $\{1,2,3,4,6,8,10\}$

C. $\{0,5,7,9\}$　　D. $\{0,1,2,3,4,6,8,10\}$

2. 已知复数 $z=\dfrac{a+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}(a\in\mathbf{R})$,$|z|=\sqrt{10}$,且 z 在复平面上对应的点位于第二象限,则 $a=$

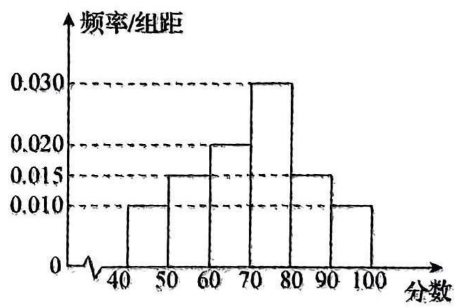
A. 4　　B. -4　　C. ± 4　　D. ± 2

3. 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-x^2-1$ 的部分图象是



A　　B　　C　　D

4. 某教育主管部门为护航青少年健康成长,在全区12 000名学生中进行《青少年自我保护意识和能力》问卷调查,调查结束后,随机抽取1 000份调查问卷,并将成绩进行统计(满分:100分),按照[40,50),[50,60),[60,70),[70,80),[80,90),[90,100]分成6组,可得到如图所示的频率分布直方图.用样本估计总体,则下列说法不正确的是



A. 全区学生调查问卷成绩的平均数大于70分(同一组数据用该组区间的中点值作代表)

B. 全区学生调查问卷成绩的中位数大于70分

C. 全区学生调查问卷成绩在[60,70)的人数为2 500

D. 全区学生调查问卷成绩不低于80分的学生占全体学生的25%

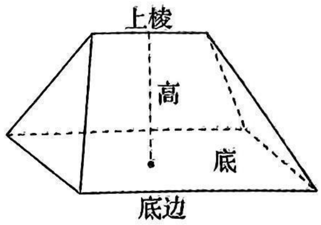
5. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_{1\,023}-S_{1\,000}=1$，则 $S_{2\,023}=$

A. 2 023　　B. $\frac{2\,023}{23}$　　C. 2 022　　D. $\frac{2\,022}{23}$

6. 为科学开展乡村绿化美化，促进农村人居环境整治提升，某乡镇从 A,B,C,D,E 共 5 个自然村中任选 3 个作为试点，则 A,B 两个自然村恰有 1 个被选中的概率为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

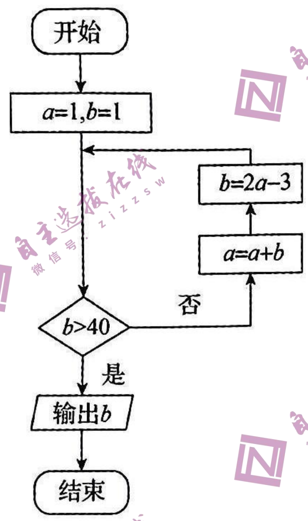
7. 刍(chú)甍(méng)是中国古代算数中的一种几何体，其结构特征是：底面为矩形，上棱和底面平行，且长度不等于底面平行的棱长的五面体.如图所示的刍甍是一个对称的五面体，底面矩形的长为 4，宽为 2，上棱长为 2，高为 4，则它的外接球的表面积为



A. $\frac{13}{2}\pi$　　B. $12\sqrt{2}\pi$

C. 26π　　D. 29π

8. 执行如图所示的程序框图，则输出 b 的值为



A. 45　　B. 64　　C. 81　　D. 92

9. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=1,|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

10. 已知 α,β 均为锐角，且 $\sin\alpha=\sqrt{5}\sin\beta,\sqrt{2}\cos\alpha=\cos\beta$，则 $\tan^2\alpha-\tan\beta=$

A. $\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{5+\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{5-\sqrt{2}}{4}$

11. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$的左焦点为 F，右顶点为 A，一条渐近线与圆 A：$(x-a)^2+y^2=b^2$ 在第一象限交于点 M，MF 交 y 轴于点 N，且$\angle FNA=90^\circ$，则 C 的离心率为

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $1+\sqrt{2}$　　D. $2+\sqrt{2}$

12. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$.若 $f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$为偶函数，$f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$为奇函数，则 ω 的值可以是

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{5}{4}$　　C. $\frac{7}{4}$　　D. $\frac{9}{4}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足关系式 $f(x)=x^2+2xf'(1)+\ln x$，则 $f'(1)=$________.

14. 已知 $\theta\in(0,2\pi)$，角 θ 的终边过点 $\left(\cos\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5},\cos\frac{6\pi}{5}-\sin\frac{6\pi}{5}\right)$，则 $\theta=$________.

15. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)$ 为偶函数，$f(x+1)$ 为奇函数，则 $f(2\,023)=$________.

16. 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$，过点 $D(0,2)$ 的直线交 C 于 A,B 两点，C 在 A,B 两点处的切线交于点 $M(a,b)$，且 $a+b=-1$. 若点 M 到直线 AB 的距离为 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$，则 $p=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17. (12 分)

记△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $c=2b$，D,E 是 BC 边上的点，且满足 $BD=DE=EC$，$c=\frac{6\sqrt{17}}{17}AD$.

(1)求∠BAC；

(2)若 $a=\sqrt{5}$，求△ADE 的外接圆的直径.

18. (12 分)

国庆假期期间，某旅游景点统计了假期第二天至第六天(顺序号：x)的客流量(单位：万人)，得到以下数据：

日期顺序号 x	2	3	4	5	6
客流量 y/万人	10	12	15	16	17

(1)求相关系数 r(精确到 0.01)；

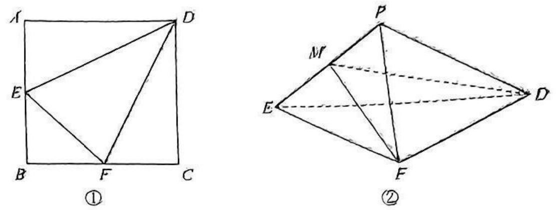
(2)求 y 关于 x 的线性回归方程；

(3)根据(2)中求得的回归方程，试估计第七天的客流量.

附：回归直线 $y=bx+a$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$，相关系数 $r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，$\sqrt{85}\approx9.220$.

19. (12 分)

如图①，在正方形 $ABCD$ 中，E 是 AB 边的中点，F 是 BC 边的中点，将△AED，△BEF，△DCF 分别沿 DE,EF,DF 折起，使 A,B,C 三点重合于点 P，得到四面体 P-DEF，如图②，且 M 为棱 PE 上一点.



(1)证明：$PD\perp MF$；

(2)若 $AB=6$，三棱锥 M-EFD 的体积为 3，求 MF 的长度.

20. (12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{3}x^3-ax-1(a\in\mathbf{R})$.

(1)设 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，判断 $f'(x)$ 的单调性；

(2)当 $t\in[0,2e]$时，证明：$f(x)+(a+1)x>t\ln x$.

21. (12 分)

已知圆 $O_1:(x+1)^2+y^2=\frac{1}{4}$，圆 $O_2:(x-1)^2+y^2=\frac{49}{4}$，圆 M 与圆 O_1 外切，且与圆 O_2 内切.

(1)求圆心 M 的轨迹 C 的方程；

(2)若 A,B,Q 是 C 上的三点，且直线 AB 不与 x 轴垂直，O 为坐标原点，$\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则当△$AOB$ 的面积最大时，求 $\lambda^2+\mu^2$ 的值.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3+2\cos\alpha,\\ y=1+2\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数). 以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程是 $3\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+3=0$.

(1)求 C 的普通方程和 l 的直角坐标方程；

(2)已知点 $P(2,0)$，直线 l 与 C 交于 A,B 两点，求△PAB 的面积.

23. [选修 4—5：不等式选讲](10 分)

已知不等式 $|x+m|+|x+2|\geqslant3$ 恒成立，正数 m 的最小值为 M.

(1)求 M；

(2)若正数 a,b,c 满足 $2a+b+c=M$，证明：$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\geqslant\frac{4}{5}$.