

2023 届“皖南八校”高三第二次大联考

数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
3. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | (x-2)^2 \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. $\{1, 2\}$
 - B. $\{0, 1, 2, 3\}$
 - C. $\{1, 2, 3\}$
 - D. $\{2\}$
2. 若复数 z 满足 $|z-i| = \bar{z}i$ (i 为虚数单位), 则 $z =$
 - A. $-\frac{1}{2}$
 - B. $\frac{1}{2}$
 - C. $-\frac{1}{2}i$
 - D. $\frac{1}{2}i$
3. 已知单位向量 a, b 满足 $|a+b| = \sqrt{3}$, 则 a 在 b 上的投影向量为
 - A. a
 - B. $\frac{1}{2}a$
 - C. $\frac{1}{2}b$
 - D. b
4. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 以正方形 $ABCD$ 的两个顶点为焦点, 且经过该正方形的另两个顶点, 则双曲线 E 的离心率为
 - A. $\sqrt{2} + 1$
 - B. $\sqrt{2} - 1$
 - C. $2\sqrt{2} + 2$
 - D. $2\sqrt{2} - 2$
5. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp AB$, $PA = 12$, $AB = 16$, $PC = 10\sqrt{2}$, $\angle PBC = 45^\circ$, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为
 - A. $\frac{4000\pi}{3}$
 - B. 400π
 - C. 169π
 - D. $\frac{169\pi}{3}$
6. 已知圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$, 若直线 $y = kx + 2$ 上至少存在一点, 使得以该点为圆心, 1 为半径的圆与圆 C 有公共点, 则实数 k 的最小值是
 - A. $-\frac{3}{5}$
 - B. $-\frac{4}{5}$
 - C. $-\frac{6}{5}$
 - D. $-\frac{12}{5}$
7. 为落实疫情防控“动态清零”总方针和“四早”要求, 有效应对奥密克戎变异株传播风险, 确保正常生活 and 生产秩序, 某企业决定于每周的周二、周五各做一次抽检核酸检测. 已知该企业组装车间的某小组有 6 名工人, 每次独立、随机的从中抽取 3 名工人参加核酸检测. 设该小组在一周内的两次抽检中共有 ξ 名不同的工人被抽中, 下列结论不正确的是

座位号

考场号

准考证号

姓名

班级

学校

答 案 不 在 内 封 密

A. 该小组中的工人甲一周内被选中两次的概率为 $\frac{1}{4}$

B. $P(\xi=3) < P(\xi=6)$

C. 该小组中的工人甲一周内至少被选中一次的概率为 $\frac{3}{4}$

D. $P(\xi=4) = P(\xi=5)$

8. 已知 $f(x) = -x^2 - \cos x$, 若 $a = f(e^{-\frac{1}{8}})$, $b = f(\ln \frac{8}{9})$, $c = f(-\frac{1}{8})$, 则 a, b, c 大小关系为

A. $c < b < a$

B. $a < c < b$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 随着时代与科技的发展, 信号处理以各种方式被广泛应用于医学、声学、密码学、计算机科学、量子力学等各个领域. 而信号处理背后的“功臣”就是正弦型函数, $f(x) = \sum_{i=1}^4 \frac{\sin[(2i-1)x]}{2i-1}$

的图象就可以近似的模拟某种信号的波形, 则下列说法正确的是

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 0)$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 为周期函数, 且最小正周期为 π

D. 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的最大值为 4

10. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 4, 过 F 的直线与抛物线交于 A, B 两点, M 为线段 AB 的中点, 则下列结论正确的是

A. 抛物线 C 的准线方程为 $y = -2$

B. 当 $3\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FB}$, 则直线 AB 的倾斜角为 30°

C. 若 $|AB| = 16$, 则点 M 到 x 轴的距离为 8

D. $4|AF| + |BF| \geq 18$

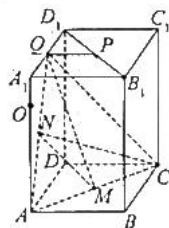
11. 在底面边长为 2、高为 4 的正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, O 为棱 A_1A 上一点, 且 $A_1O = \frac{1}{4}A_1A$, P, Q 分别为线段 B_1D_1, A_1D_1 上的动点, M 为底面 $ABCD$ 的中心, N 为线段 AQ 的中点, 则下列命题正确的是

A. CN 与 QM 共面

B. 三棱锥 $A - DMN$ 的体积为 $\frac{4}{3}$

C. $PQ + QO$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. 当 $\overrightarrow{D_1Q} = \frac{1}{3}\overrightarrow{D_1A_1}$ 时, 过 A, Q, M 三点的平面截正四棱柱所得截面的周长为 $\frac{8(\sqrt{2} + \sqrt{10})}{3}$



12. 已知 $f(x), g(x)$ 都是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 对任意 x, y 满足 $f(x-y) = f(x)g(y) - g(x)f(y)$, 且 $f(-2) = f(1) \neq 0$, 则下列说法正确的有

A. $g(0) = 1$

B. 函数 $f(2x-1)$ 的图象关于点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 对称

C. $g(1) + g(-1) = 1$

D. 若 $f(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\sum_{n=1}^{2023} f(n) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 国庆节前夕,某市举办以“红心颂党恩、喜迎二十大”为主题的青少年学生演讲比赛,其中 10 人比赛的成绩从低到高依次为:85,86,88,88,89,90,92,93,94,98(单位:分),则这 10 人成绩的第 75 百分位数是_____.

14. 在 $(x - \frac{1}{x} + y)^{11}$ 的展开式中, xy^8 的系数为_____.

15. 已知 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, $\tan(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\beta + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 则 $\cos(2\alpha - \beta) =$ _____.

16. 已知 $a < 0$, 不等式 $x^{a+1} \cdot e^x + a \ln x \geq 0$ 对任意的实数 $x > 1$ 恒成立, 则实数 a 的最小值是_____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{1}{2}$, 且满足 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求证: 数列 $\{\frac{1}{a_n} + 1\}$ 为等比数列;

(2) 若 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} < 121$, 求满足条件的最大整数 n .

18. (12 分)

近年来,我国大学生毕业人数呈逐年上升趋势,各省市出台优惠政策鼓励高校毕业生自主创业,以创业带动就业.某市统计了该市其中四所大学 2021 年的毕业生人数及自主创业人数(单位:千人),得到如下表格:

大学	A 大学	B 大学	C 大学	D 大学
当年毕业人数 x (千人)	3	4	5	6
自主创业人数 y (千人)	0.1	0.2	0.4	0.5

(1) 已知 y 与 x 具有较强的线性相关关系,求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$;

(2) 假设该市政府对选择自主创业的大学生每人发放 1 万元的创业补贴.

(i) 若该市 E 大学 2021 年毕业生人数为 7 千人,根据(1)的结论估计该市政府要给 E 大学选择自主创业的毕业生创业补贴的总金额;

(ii) 若 A 大学的毕业生中小明、小红选择自主创业的概率分别为 $p, 2p - 1 (\frac{1}{2} < p < 1)$, 该政府对小明、小红两人的自主创业的补贴总金额的期望不超过 1.4 万元,求 p 的取值范围.

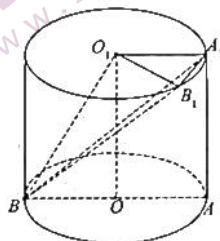
参考公式: 回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

19. (12分)

如图,将长方形 OAA_1O_1 (及其内部)绕 OO_1 旋转一周形成圆柱,其中 $OA=1, O_1O=2$,劣弧 A_1B_1 的长为 $\frac{\pi}{6}$, AB 为圆 O 的直径.

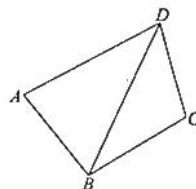
- (1)在弧 AB 上是否存在点 C (C, B_1 在平面 OAA_1O_1 的同侧),使 $BC \perp AB_1$,若存在,确定其位置,若不存在,说明理由;
- (2)求平面 A_1O_1B 与平面 B_1O_1B 夹角的余弦值.



20. (12分)

如图,在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB=BC=CD=2, AD=2\sqrt{3}$.

- (1)若 DB 平分 $\angle ADC$,证明: $A+C=\pi$;
- (2)记 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 的面积分别为 S_1 和 S_2 ,求 $S_1^2+S_2^2$ 的最大值.



21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, 其右焦点为 $F(\sqrt{3}, 0)$.

- (1)求椭圆 C 的标准方程;
- (2)椭圆 C 的右顶点为 A , 若点 P, Q 在椭圆 C 上,且满足直线 AP 与 AQ 的斜率之积为 $\frac{1}{20}$, 求 $\triangle APQ$ 面积的最大值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = 3x - e^x + 1$, 其中 $e = 2.71828\dots$ 是自然对数的底数.

- (1)设曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴正半轴相交于点 $P(x_0, 0)$, 曲线在点 P 处的切线为 l , 求证: 曲线 $y = f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方;
- (2)若关于 x 的方程 $f(x) = m$ (m 为正实数) 有两个不等实根 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 求证: $x_2 - x_1 < 2 - \frac{3}{4}m$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线