2023 届高三年级第二次模拟考试

文科数学・答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. D	2. C	3. A	4. C	5. B	6. B
7. C	8. D	9. A	10. B	11. C	12. D

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 25%　　14. $f(x)=\frac{1}{x-2}$(答案不唯一)

15. $\sqrt{13}$或$3\sqrt{5}$　　16. $4\sqrt{3}$

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 解析　(Ⅰ)因为$c(\sin C-\sqrt{3}\sin B)=(a-b)(\sin A+\sin B)$,

所以由正弦定理可得$c(c-\sqrt{3}b)=(a-b)(a+b)$,

即$b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc$. ……………………(2 分)

由余弦定理可得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ……………………(4 分)

又$A\in(0,\pi)$,所以$A=\frac{\pi}{6}$. ……………………(5 分)

(Ⅱ)因为$\sin B=1+\cos C$,

所以$\sin B=1+\cos\left(\frac{5\pi}{6}-B\right)=1+\cos\frac{5\pi}{6}\cos B+\sin\frac{5\pi}{6}\sin B=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$,

即$\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=1$, ……………………(7 分)

所以$B=\frac{\pi}{6}$.

所以$a=b,C=\frac{2\pi}{3}$. ……………………(8 分)

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}$,

所以$a=b=2$. ……………………(10 分)

在$\triangle ACD$中,由余弦定理可得$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=2^2+1^2-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$,

即$AD=\sqrt{7}$. ……………………(12 分)

18. 解析　(Ⅰ)由题可知$\bar{t}=\frac{1}{7}(1+2+3+4+5+6+7)=4,\bar{y}=\frac{1}{7}(3+4+3+4+7+6+8)=5$, ………(2 分)

$\sum_{i=1}^{7}t_iy_i=163,7\bar{t}\bar{y}=7\times4\times5=140$, $\sum_{i=1}^{7}t_i^2=140,7\bar{t}^2=112$, ……………………(3 分)

所以$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}t_iy_i-7\bar{t}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{7}t_i^2-7\bar{t}^2}=\frac{163-140}{140-112}=\frac{23}{28}\approx0.82$, ……………………(4 分)

7. 答案　C

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质及三角函数值域的求解.

解析　因为$f(0)=\sin\varphi=-\frac{1}{2}$,且$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 因为$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{12}\omega-\frac{\pi}{6}\right)=0$,所以$\frac{7\pi}{12}\omega-\frac{\pi}{6}=\pi$,所以$\omega=2$. 所以$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,当$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$时,$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$,$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

8. 答案　D

命题意图　本题考查二面角的计算.

解析　取AB的中点O,连接OC,易知$OA\perp OC$. 过O作OH垂直AC于H,连接SH,OS. 因为$SO\perp$底面,所以$\angle SHO$为平面SAC与底面ABC所成的锐二面角的平面角,可求得$OH=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$SO=\sqrt{3}$,所以$\tan\angle SHO=\frac{SO}{OH}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}$.

9. 答案　A

命题意图　本题考查双曲线的方程.

解析　设双曲线C的半焦距为$c(c>0)$. 由题可知$2c=2\sqrt{3}$,即$c=\sqrt{3}$. 因为$|F_2Q|=\frac{1}{2}|PF_1|$,所以$PF_2\perp F_1F_2$,所以$|PF_2|=\frac{2c}{\sqrt{3}}$,$|PF_1|=\frac{4c}{\sqrt{3}}$,所以$|PF_1|-|PF_2|=\frac{4c}{\sqrt{3}}-\frac{2c}{\sqrt{3}}=\frac{2c}{\sqrt{3}}=2a$,所以$\frac{c}{a}=\sqrt{3}$,所以$a=1$,$b=\sqrt{2}$. 所以双曲线$C$的方程为$x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

10. 答案　B

命题意图　本题考查数列的综合.

解析　由题可知$c_n=2\cdot2^{n-80}=2^{n-79}(n\geqslant41)$,根据定义,$c_1,c_2,\cdots,c_{40}$也为等比数列,首项为$c_1=1$,公比为2,所以$c_n=1\cdot2^{n-1}=2^{n-1}(n\leqslant40)$,故$c_n=\begin{cases}2^{n-1},n\leqslant40,\\2^{n-79},n\geqslant41,\end{cases}$ $\log_2c_n=\begin{cases}n-1,n\leqslant40,\\n-79,n\geqslant41,\end{cases}$ 当$n\leqslant40$时,$S_n=\frac{n(n-1)}{2}$,当$41\leqslant n\leqslant80$时,$S_n=S_{40}+(\log_2c_{41}+\log_2c_{42}+\cdots+\log_2c_n)=\frac{40\times39}{2}+\frac{(n-40)(n-79-38)}{2}=\frac{n^2-157n+6\ 240}{2}$,

综上,$S_n=\begin{cases}\frac{n(n-1)}{2},n\leqslant40,\\\frac{n^2-157n+6\ 240}{2},n\geqslant41,\end{cases}$ 故$S_{50}=\frac{50^2-157\times50+6\ 240}{2}=445$.

11. 答案　C

命题意图　本题考查直线与圆的位置关系及平面向量的数量积.

解析　根据题意可得$\begin{cases}(-2+m)^2=n^2,\\1+(-1+m)^2=n^2,\end{cases}$ 解得$m=1$,$n^2=1$,故圆M的方程为$x^2+(y+1)^2=1$. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\rangle=\sqrt{2}|\overrightarrow{PB}|\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\rangle$,画图分析可知当与直线$PA$垂直的直线$l$和圆$N$相切,切点为$B$,且直线$l$的纵截距大于0时,$|\overrightarrow{PB}|\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\rangle$最大. 设$l$的方程为$y=-x+a(a>0)$,由圆心$N(0,1)$到直线$l$的距离为$\frac{|1-a|}{\sqrt{2}}=1$,解得$a=1+\sqrt{2}$或$1-\sqrt{2}$(舍去). 故$l$的方程为$y=-x+1+\sqrt{2}$,其与直线$PA:y=x-2$的交点坐标为$Q\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$,所以$|PQ|=\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$,所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\sqrt{2}|\overrightarrow{PB}|\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\rangle\leqslant\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}+2}{2}=3+\sqrt{2}$,即$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最大值为$3+\sqrt{2}$.

12. 答案　D

命题意图　本题考查指数与对数的大小比较及导数的应用.

解析　设函数$f(x)=e^x-1-x^2$,则$f'(x)=e^x-2x$,令函数$h(x)=e^x-2x$,则$h'(x)=e^x-2$. 令$h'(x)=0$,得$x=\ln 2$,所以$h(x)$在$(0,\ln 2)$上单调递减,在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增,故$h(x)\geqslant h(\ln 2)=2-2\ln 2>0$,因此$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以$f(x)>f(0)=0$. 令$x=0.1$,则$f(0.1)=e^{0.1}-1-0.1^2>0$,所以$e^{0.1}-1>0.01$,即$a<b$. 构造函数$g(x)=x-\ln x-1$,则$g'(x)=1-\frac{1}{x}$,因此$g(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,所以$g(x)\geqslant g(1)=0$,令$x=0.01$,则$g(0.01)=0.01-\ln 0.01-1>0$,所以$a>c$. 故$b>a>c$.

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 答案　25%

命题意图　本题考查样本平均数的计算.

解析　根据题意,该校教师的“亚健康”率为$\frac{60\times 50\%+100\times 30\%+200\times 15\%}{60+100+200}=25\%$.

14. 答案　$f(x)=\frac{1}{x-2}$(答案不唯一)

命题意图　本题考查函数的性质.

解析　由$f(x)$的图象关于点$(2,0)$对称,可设$f(x)=\frac{1}{x-2}$,则$f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}$. 当$x>2$时,$f(x)$单调递减,$f'(x)$单调递增,满足题意. 其他满足条件的解析式也可以.

15. 答案　$\sqrt{13}$或$3\sqrt{5}$

命题意图　本题考查抛物线的性质.

解析　由题意知$F(1,0)$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则由$|AF|=2$,得$x_1+1=2$,得$x_1=1$,代入$C:y^2=4x$,得$y_1=\pm 2$,所以$A(1,2)$或$A(1,-2)$. 由$|BF|=5$,得$x_2+1=5$,得$x_2=4$,代入$C:y^2=4x$,得$y_2=\pm 4$,所以$B(4,4)$或$B(4,-4)$. 根据抛物线的对称性可得$|AB|=\sqrt{13}$或$|AB|=3\sqrt{5}$.

16. 答案　$4\sqrt{3}$

命题意图　本题考查空间几何体的结构特征及导数的应用.

解析　设正六棱柱$ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$的底面边长为$a$,高为$h$. 若要使该正六棱柱的体积最大,正六棱柱应为球的内接正六棱柱中体积最大者,所以$\frac{h^2}{4}+a^2=2^2$,即$a^2=4-\frac{h^2}{4}$,又$S_{正六边形ABCDEF}=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$,所以该正六棱柱的体积为$V=S_{正六边形ABCDEF}\cdot h=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h=\frac{3\sqrt{3}}{8}(16-h^2)h$. 设$f(h)=(16-h^2)h$,$0<h<4$,则$f'(h)=16-3h^2$,令$f'(h)=0$,得$h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 因为$f(h)$只有一个极值点,所以$f(h)_{\max}=f\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$,即$h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,$a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$时$V$取得最大值. 过$M$作$PQ\parallel A_1C_1$,交$A_1F_1$于点$P$,交$C_1D_1$于点$Q$,则$P$,$Q$分别是$A_1F_1$,$C_1D_1$的中点,又$A_1C_1\parallel AC$,所以$PQ\parallel AC$,则矩形$ACQP$即为平面$ACM$截该正六棱柱所得的截面. 因为$PQ=A_1C_1=\sqrt{3}a=2\sqrt{2}$,且$AP=CQ=\sqrt{AA_1^2+A_1P^2}=\sqrt{h^2+\frac{1}{4}a^2}=\sqrt{6}$,所以矩形$ACQP$的面积为$AC\times AP=2\sqrt{2}\times\sqrt{6}=4\sqrt{3}$.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 命题意图　本题考查正弦定理及余弦定理的应用.

解析　(Ⅰ)因为$c(\sin C-\sqrt{3}\sin B)=(a-b)(\sin A+\sin B)$,

所以由正弦定理可得 $c(c-\sqrt{3}b)=(a-b)(a+b)$，

即 $b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc$. ……………………………………………………………………（2 分）

由余弦定理可得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\sqrt{3}bc}{2bc}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ……………………………………（4 分）

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$. ……………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）因为 $\sin B=1+\cos C$，

所以 $\sin B=1+\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-B\right)=1+\cos\dfrac{5\pi}{6}\cos B+\sin\dfrac{5\pi}{6}\sin B=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B$，

即 $\dfrac{1}{2}\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$， ……………………………………………（7 分）

所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

所以 $a=b, C=\dfrac{2\pi}{3}$. ……………………………………………………………………（8 分）

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}$，

所以 $a=b=2$. ……………………………………………………………………（10 分）

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理可得 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}=2^2+1^2-2\times2\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=7$，

即 $AD=\sqrt{7}$. ……………………………………………………………………（12 分）

18. **命题意图** 本题考查线性回归及几何概型.

解析 （Ⅰ）由题可知 $\bar{t}=\dfrac{1}{7}(1+2+3+4+5+6+7)=4$，$\bar{y}=\dfrac{1}{7}(3+4+3+4+7+6+8)=5$， ………（2 分）

$\sum\limits_{i=1}^{7}t_iy_i=163$，$7\bar{t}\bar{y}=7\times4\times5=140$，$\sum\limits_{i=1}^{7}t_i^2=140$，$7\bar{t}^2=112$， ……………………………（3 分）

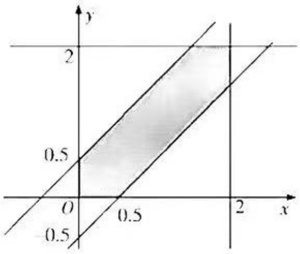
所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}t_iy_i-7\bar{t}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{7}t_i^2-7\bar{t}^2}=\dfrac{163-140}{140-112}=\dfrac{23}{28}\approx0.82$， ……………………………………（4 分）

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=1.72$， ……………………………………………………………………（5 分）

所以 y 关于 t 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.82t+1.72$. ………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）记 9 时为 0 时，11 时为 2 时，设老师甲进入的时间为 x，学生乙进入的时间为 y，则 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant2,\\0\leqslant y\leqslant2,\end{cases}$ 其对应的区域如图中正方形所示， ……………………………………………………………………（7 分）

若这两人等待不超过 0.5 小时，则 $|y-x|\leqslant0.5$，其对应的区域如图中阴影部分所示. ………………（9 分）



记“这两人等待不超过0.5小时”为事件A，

则$P(A)=\dfrac{4-2\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}{4}=\dfrac{7}{16}$.

故这两人等待不超过0.5小时的概率为$\frac{7}{16}$. ……………………………………………………………… (12分)

19. **命题意图** 本题考查面面垂直的证明及几何体体积的计算.

解析 (Ⅰ)如图，设AC与BD交于点O，连接OG，OE.

因为O，G分别为BD，BC的中点，所以$OG /\!/ AB$，$OG=\frac{1}{2}AB=2$.

因为$EF=2=\frac{1}{2}AB$，$EF/\!/CD/\!/AB$，所以四边形$EFGO$为平行四边形，…………………………… (2分)

所以$OE/\!/FG$，

又$FG\perp$平面$ABCD$，

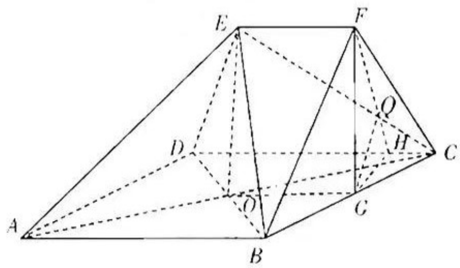
所以$OE\perp$平面$ABCD$. ………………………………………………………………………………… (3分)

因为$AC\subset$平面$ABCD$，所以$OE\perp AC$，

又四边形$ABCD$为菱形，所以$AC\perp BD$. ……………………………………………………………… (4分)

因为$OE\cap BD=O$，所以$AC\perp$平面BED，

又$AC\subset$平面ACE，故平面$ACE\perp$平面BED. ……………………………………………………… (5分)



(Ⅱ)因为$FG\perp$平面$ABCD$，所以$FG\perp CD$，$FG\perp BC$，

所以$FG=\sqrt{CF^2-CG^2}=2\sqrt{3}$，所以$OE=2\sqrt{3}$. ……………………………………………………… (6分)

由(Ⅰ)可知$OE\perp BD$，由题可知$OB=OD=2$，所以$BE=DE=4$，

所以四边形$CDEF$为等腰梯形. ………………………………………………………………………… (7分)

过G点向CD作垂线，垂足为H，连接FH.

因为$CD\perp GH$，$CD\perp FG$，$FG\cap GH=G$，

所以$CD\perp$平面FGH，

又$CD\subset$平面$CDEF$，故平面$CDEF\perp$平面FGH.

过G作GQ垂直于FH，垂足为Q，则$GQ\perp$平面$CDEF$. ……………………………………………… (8分)

由题可知$GH=\sqrt{3}$，$FH=\sqrt{15}$，

因为$GQ\cdot FH=FG\cdot GH$，所以$GQ=\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

因为G为BC的中点，所以B点到平面$CDEF$的距离为$\frac{4\sqrt{15}}{5}$. …………………………………… (9分)

又$S_{CDEF}=\frac{1}{2}(CD+EF)\cdot FH=3\sqrt{15}$，

故 $V_{B-CDEF}=\frac{1}{3}\times3\sqrt{15}\times\frac{4\sqrt{15}}{5}=12.$ …………（10分）

又 $V_{E-ABD}=\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times16=8$，

故该几何体的体积为 $V_{B-CDEF}+V_{E-ABD}=20.$ …………（12分）

20. **命题意图** 本题考查椭圆的方程的求解及直线与椭圆的位置关系.

解析 （Ⅰ）设 $P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，得 $Q\left(-\frac{a}{b}y_0,y_0\right)$，同理可得 $R\left(x_0,-\frac{b}{a}x_0\right)$.

所以 $S_1=\frac{1}{2}y_0\left|-\frac{a}{b}y_0\right|=\frac{a}{2b}y_0^2,S_2=\frac{1}{2}x_0\left|-\frac{b}{a}x_0\right|=\frac{b}{2a}x_0^2$， …………（2分）

所以 $S_1+S_2=\frac{a}{2b}y_0^2+\frac{b}{2a}x_0^2=\frac{a^2y_0^2+b^2x_0^2}{2ab}=\frac{b^2(a^2-x_0^2)+b^2x_0^2}{2ab}=\frac{ab}{2}=1$，

即 $ab=2.$ …………（3分）

又 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{1}{2}$，所以 $a=2,b=1.$ …………（4分）

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1.$ …………（5分）

（Ⅱ）联立直线 l 和椭圆 E 的方程得 $\begin{cases}y=kx+3,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$

消去 y 得 $(1+4k^2)x^2+24kx+32=0.$

由 $\Delta=(24k)^2-4\times32(1+4k^2)>0$，可得 $k^2>2.$ …………（7分）

设 $S(x_1,y_1),T(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{-24k}{1+4k^2},x_1x_2=\frac{32}{1+4k^2}>0.$ …………（8分）

由题易知 $x_1\neq0,x_2\neq0,y_1\neq-1,y_2\neq-1$，

所以直线 SN 的方程为 $y+1=\frac{y_1+1}{x_1}(x-0)$，

令 $y=0$，得 $x_C=\frac{x_1}{y_1+1}$，同理 $x_D=\frac{x_2}{y_2+1}$. …………（9分）

所以 $|OC|\cdot|OD|=\left|\frac{x_1}{y_1+1}\right|\cdot\left|\frac{x_2}{y_2+1}\right|$

$$=\frac{x_1x_2}{(y_1+1)(y_2+1)}$$

$$=\frac{x_1x_2}{(kx_1+4)(kx_2+4)}$$

$$=\frac{x_1x_2}{k^2x_1x_2+4k(x_1+x_2)+16}$$ …………（11分）

$$=\frac{\frac{32}{1+4k^2}}{k^2\cdot\frac{32}{1+4k^2}+4k\left(\frac{-24k}{1+4k^2}\right)+16}$$

$$=\frac{32}{16}$$

$$=2.$$

故 $|OC|\cdot|OD|$ 为定值 2. ……………………………………………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查导数的几何意义及导数的应用.

解析 （Ⅰ）设切点坐标为 $(x_0,f(x_0))$.

因为 $f'(x)=xe^x$，所以切线方程为 $y-(x_0-1)e^{x_0}=x_0e^{x_0}(x-x_0)$，……………………（2 分）

将 $(m,0)$ 代入，可得 $x_0^2-(m+1)x_0+1=0$.

因为曲线 $y=f(x)$ 有两条过点 $(m,0)$ 的切线，

所以 $\Delta=(m+1)^2-4>0$，解得 $m>1$ 或 $m<-3$，

故实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$. ……………………………………（4 分）

（Ⅱ）设 $h(x)=f(x)-g(x)=(x-1)e^x-a\ln x$，

则 $h'(x)=xe^x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2e^x-a}{x}(x>0)$. ……………………………………（5 分）

当 $a\leqslant0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

因为当 $x>1$ 时，$h(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$h(x)<0$，所以 $f(x)\geqslant g(x)$ 不恒成立. ……………（6 分）

当 $a>0$ 时，设 $\varphi(x)=x^2e^x-a$，则 $\varphi'(x)=e^x(x+2)x>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又当 $x>0$ 且 $x\to0$ 时，$\varphi(x)\to-a$，当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$，

故 $\exists x_0>0$，使得 $\varphi(x_0)=0$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$\varphi(x)<0$，$h'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$，$h'(x)>0$.

因为 $\varphi(x_0)=0$，所以 $x_0^2e^{x_0}=a$. ……………………………………………………（8 分）

故 $h(x)_{\min}=h(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-a\ln x_0=(x_0-1)e^{x_0}-x_0^2e^{x_0}\ln x_0=x_0^2e^{x_0}\left(\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{x_0^2}-\ln x_0\right)\geqslant0$.

因为 $x_0^2e^{x_0}>0$，所以只需 $\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{x_0^2}-\ln x_0\geqslant0$. ……………………………………（10 分）

设 $t(x)=x-x^2+\ln x$，则 $t'(x)=1-2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-(2x+1)(x-1)}{x}$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$t'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$t'(x)<0$，

所以 $t(x)_{\max}=t(1)=0$，所以 $x-x^2+\ln x\leqslant0$. ……………………………………（11 分）

所以 $\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{x_0^2}-\ln x_0\leqslant0$，故 $\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{x_0^2}-\ln x_0=0$，

所以 $\dfrac{1}{x_0}=1$，$x_0=1$，所以 $a=e$，

故实数 a 的取值集合为 $\{e\}$. ……………………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查参数方程与普通方程、极坐标方程与直角坐标方程之间的互化，以及参数方程的应用.

解析 （Ⅰ）由 $\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t},\\ y=2\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\end{cases}$（$t$ 为参数）消去参数 t，可得曲线 E 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$. …………（2 分）

令 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 可得直线 AB 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y+1=0$，

故直线 AB 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$. ……………………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）设 $P(x_0,y_0)$，

则直线 AB 的参数方程为$\begin{cases} x = x_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}s, \\ y = y_0 + \frac{1}{2}s \end{cases}$（$s$ 为参数），

直线 CD 的参数方程为$\begin{cases} x = x_0 + m\cos\beta, \\ y = y_0 + m\sin\beta \end{cases}$（$m$ 为参数）. …………（5 分）

将直线 CD 的参数方程代入曲线 E 的方程可得

$(4\cos^2\beta - \sin^2\beta)m^2 + 2(4x_0\cos\beta - y_0\sin\beta)m + (4x_0^2 - y_0^2 - 16) = 0$. …………（6 分）

设 C,D 对应的参数分别为 m_1, m_2，

根据参数 m 的几何意义，可得 $|PC|\cdot|PD| = |m_1|\cdot|m_2| = \left|\frac{4x_0^2 - y_0^2 - 16}{4\cos^2\beta - \sin^2\beta}\right|$.

同理可得 $|PA|\cdot|PB| = \left|\frac{16x_0^2 - 4y_0^2 - 64}{11}\right|$.

所以 $\frac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|} = \frac{|16\cos^2\beta - 4\sin^2\beta|}{11} = \frac{|10\cos 2\beta + 6|}{11}$. …………（8 分）

因为 $0 < \beta < \frac{\pi}{6}$，所以 $0 < 2\beta < \frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{1}{2} < \cos 2\beta < 1$， …………（9 分）

故 $\frac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}$ 的取值范围为 $\left(1, \frac{16}{11}\right)$. …………（10 分）

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的求解及基本不等式的应用.

解析 （Ⅰ）由题可知 $f(x) = \begin{cases} -6, x \leqslant 0, \\ 4x - 6, 0 < x < 3, \\ 6, x \geqslant 3. \end{cases}$ …………（2 分）

由 $|f(x)| \leqslant 2$ 可得 $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$， …………（3 分）

所以 $-2 \leqslant 4x - 6 \leqslant 2$，所以 $1 \leqslant x \leqslant 2$.

故不等式 $|f(x)| \leqslant 2$ 的解集为 $[1,2]$，

所以 $a = 1, b = 2$. …………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $x^2 + 4y^2 = 32$，

所以 $(x + 2y)^2 = x^2 + 4y^2 + 4xy = 32 + 2\cdot x\cdot 2y \leqslant 32 + 2\left(\frac{x + 2y}{2}\right)^2$，

所以 $-8 \leqslant x + 2y \leqslant 8$. …………（6 分）

设 $t = x + 2y$，则 $-8 \leqslant t \leqslant 8$，

$x + 2y - xy = x + 2y - \frac{1}{2}x\cdot 2y \geqslant x + 2y - \frac{1}{2}\left(\frac{x + 2y}{2}\right)^2 = t - \frac{t^2}{8} = -\frac{1}{8}(t - 4)^2 + 2$. …………（8 分）

因为函数 $g(t) = -\frac{1}{8}(t - 4)^2 + 2$ 在 $(-8, 4)$ 上单调递增，在 $(4, 8)$ 上单调递减，

所以 $-\frac{1}{8}(t - 4)^2 + 2 \geqslant -\frac{1}{8}(-8 - 4)^2 + 2 = -16$. …………（9 分）

故 $x + 2y - xy$ 的最小值为 -16，当且仅当 $x = -4, y = -2$ 时，等号成立. …………（10 分）

2023 届高三年级第二次模拟考试

文科数学 · 答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. 答案　D

命题意图　本题考查集合的运算.

解析　由 $x^2+2x\leqslant 0$，可得 $-2\leqslant x\leqslant 0$，所以 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 0\}$. 由 $|x|>1$，可得 $x>1$ 或 $x<-1$，所以 $B=\{x|x>1$ 或 $x<-1\}$. 所以 $A\cap B=[-2,-1)$.

2. 答案　C

命题意图　本题考查复数的运算及复数的模.

解析　因为 $(\mathrm{i}+z)\mathrm{i}=1+2\mathrm{i}$，所以 $z=\dfrac{2+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=2-2\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=2+2\mathrm{i}$，所以 $|z-\bar{z}|=|-4\mathrm{i}|=4$.

3. 答案　A

命题意图　本题考查等差数列的性质.

解析　由 $a_1+a_3+a_5=12$ 得 $3a_3=12$，$a_3=4$，$\therefore d=\dfrac{a_{12}-a_3}{12-3}=\dfrac{22-4}{12-3}=2$.

4. 答案　C

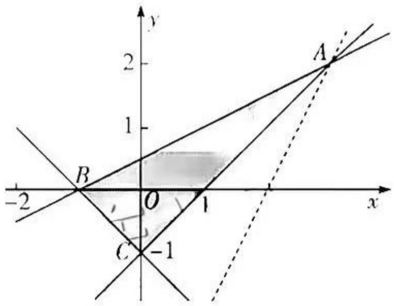
命题意图　本题考查相关指数及误差的应用.

解析　比较相关指数可知，可选 C，D，观察误差平方和和均方根值，可知 C 的拟合效果最好.

5. 答案　B

命题意图　本题考查线性规划.

解析　画出约束条件表示的平面区域，如图中阴影部分所示. 目标函数 $z=-2x+y$，即 $y=2x+z$，平移直线 $y=2x+z$，当其过点 A 时纵截距最小，即 z 最小. 由 $\begin{cases}x-y-1=0,\\x-2y+1=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=3,\\y=2,\end{cases}$ 即点 $A(3,2)$，所以 $z_{\min}=-2\times 3+2=-4$.



6. 答案　B

命题意图　本题考查古典概型.

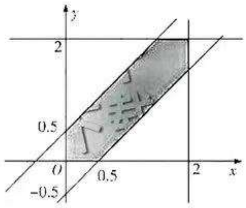
解析　设从区间 $(0,5)$，$(1,4)$ 中随机取出的整数分别为 x，y，则样本空间为 $\Omega=\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}$，设事件 A 表示 $\log_2 M>2$，则 $A=\{(3,2),(4,2),(2,3),(3,3),(4,3)\}$，所以 $P(A)=\dfrac{5}{8}$.

$\hat{a}=y-\hat{b}t=1.72$, …………………………………………………………………………（5分）

所以 y 关于 t 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.82t+1.72$. ……………………………………（6分）

（Ⅱ）记9时为0时，11时为2时，设老师甲进入的时间为 x，学生乙进入的时间为 y，则 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2,\\0\leqslant y\leqslant 2,\end{cases}$ 其对应的区域如图中正方形所示. ……………………………………………………………………（7分）

若这两人等待不超过0.5小时，则 $|y-x|\leqslant 0.5$，其对应的区域如图中阴影部分所示. …………（9分）



记"这两人等待不超过0.5小时"为事件 A，

则 $P(A)=\dfrac{4-2\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}{4}=\dfrac{7}{16}$.

故这两人等待不超过0.5小时的概率为 $\dfrac{7}{16}$. ……………………………………………（12分）

19. **解析** （Ⅰ）如图，设 AC 与 BD 交于点 O，连接 OG，OE.

因为 O，G 分别为 BD，BC 的中点，所以 $OG/\!/AB$，$OG=\frac{1}{2}AB=2$.

因为 $EF=2=\frac{1}{2}AB$，$EF/\!/CD/\!/AB$，所以四边形 $EFGO$ 为平行四边形. ……………………（2分）

所以 $OE/\!/FG$.

又 $FG\perp$ 平面 $ABCD$，

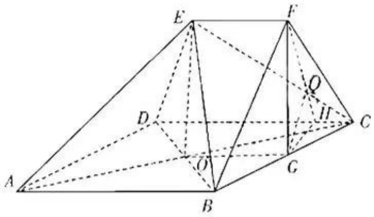
所以 $OE\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………………………………………（3分）

因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $OE\perp AC$，

又四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$. ………………………………………………（4分）

因为 $OE\cap BD=O$，所以 $AC\perp$ 平面 BED，

又 $AC\subset$ 平面 ACE，故平面 $ACE\perp$ 平面 BED. ……………………………………………（5分）



（Ⅱ）因为 $FG\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $FG\perp CD$，$FG\perp BC$，

所以 $FG=\sqrt{CF^2-CG^2}=2\sqrt{3}$，所以 $OE=2\sqrt{3}$. ……………………………………（6分）

由（Ⅰ）可知 $OE\perp BD$，由题可知 $OB=OD=2$，所以 $BE=DE=4$，

所以四边形 $CDEF$ 为等腰梯形. ……………………………………………………………（7分）

过 G 点向 CD 作垂线，垂足为 H，连接 FH.

因为 $CD\perp GH$，$CD\perp FG$，$FG\cap GH=G$，

— 2 —

所以 $CD\perp$ 平面 FGH,

又 $CD\subset$ 平面 $CDEF$,故平面 $CDEF\perp$ 平面 FGH.

过 G 作 GQ 垂直于 FH,垂足为 Q,则 $GQ\perp$ 平面 $CDEF$. …………………………………………………… (8 分)

由题可知 $GH=\sqrt{3}$,$FH=\sqrt{15}$,

因为 $GQ\cdot FH=FG\cdot GH$,所以 $GQ=\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

因为 G 为 BC 的中点,所以 B 点到平面 $CDEF$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{15}}{5}$. …………………………………… (9 分)

又 $S_{CDEF}=\frac{1}{2}(CD+EF)\cdot FH=3\sqrt{15}$,

故 $V_{B-CDEF}=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{15}\times\frac{4\sqrt{15}}{5}=12$. ………………………………………………………… (10 分)

又 $V_{E-ABD}=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 16=8$,

故该几何体的体积为 $V_{B-CDEF}+V_{E-ABD}=20$. ……………………………………………………… (12 分)

20. 解析 (Ⅰ)设 $P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$,得 $Q\left(-\frac{a}{b}y_0,y_0\right)$,同理可得 $R\left(x_0,-\frac{b}{a}x_0\right)$.

所以 $S_1=\frac{1}{2}y_0\left|-\frac{a}{b}y_0\right|=\frac{a}{2b}y_0^2$,$S_2=\frac{1}{2}x_0\left|-\frac{b}{a}x_0\right|=\frac{b}{2a}x_0^2$, …………………………………… (2 分)

所以 $S_1+S_2=\frac{a}{2b}y_0^2+\frac{b}{2a}x_0^2=\frac{a^2y_0^2+b^2x_0^2}{2ab}=\frac{b^2(a^2-x_0^2)+b^2x_0^2}{2ab}=\frac{ab}{2}=1$,

即 $ab=2$. ………………………………………………………………………………………………… (3 分)

又 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{1}{2}$,所以 $a=2,b=1$. ……………………………………………… (4 分)

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)联立直线 l 和椭圆 E 的方程得 $\begin{cases}y=kx+3,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$

消去 y 得 $(1+4k^2)x^2+24kx+32=0$.

由 $\Delta=(24k)^2-4\times 32(1+4k^2)>0$,可得 $k^2>2$. ……………………………………………………… (7 分)

设 $S(x_1,y_1)$,$T(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-\frac{24k}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{32}{1+4k^2}>0$. …………………………………… (8 分)

由题易知 $x_1\neq 0,x_2\neq 0,y_1\neq -1,y_2\neq -1$,

所以直线 SN 的方程为 $y+1=\frac{y_1+1}{x_1}(x-0)$,

令 $y=0$,得 $x_C=\frac{x_1}{y_1+1}$,同理 $x_D=\frac{x_2}{y_2+1}$. ………………………………………………………… (9 分)

$$
\begin{aligned}
\text{所以}|OC|\cdot|OD|&=\left|\frac{x_1}{y_1+1}\right|\cdot\left|\frac{x_2}{y_2+1}\right|\\
&=\frac{x_1x_2}{(y_1+1)(y_2+1)}\\
&=\frac{x_1x_2}{(kx_1+4)(kx_2+4)}\\
&=\frac{x_1x_2}{k^2x_1x_2+4k(x_1+x_2)+16}
\end{aligned}
$$
………………………………………………………… (11 分)

$$=\frac{\frac{32}{1+4k^2}}{k^2\cdot\frac{32}{1+4k^2}+4k\left(\frac{-24k}{1+4k^2}\right)+16}$$

$$=\frac{32}{16}$$

$$=2.$$

故$|OC|\cdot|OD|$为定值2. ……………………………………………………………………………… (12分)

21. **解析** （Ⅰ）设切点坐标为$(x_0,f(x_0))$.

因为$f'(x)=xe^x$,所以切线方程为$y-(x_0-1)e^{x_0}=x_0e^{x_0}(x-x_0)$, ……………………………………………… (2分)

将$(m,0)$代入,可得$x_0^2-(m+1)x_0+1=0$.

因为曲线$y=f(x)$有两条过点$(m,0)$的切线,

所以$\Delta=(m+1)^2-4>0$,解得$m>1$或$m<-3$,

故实数m的取值范围是$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$. ……………………………………………………………… (4分)

（Ⅱ）设$h(x)=f(x)-g(x)=(x-1)e^x-a\ln x$,

则$h'(x)=xe^x-\frac{a}{x}=\frac{x^2e^x-a}{x}(x>0)$. ……………………………………………………………………………… (5分)

当$a\leqslant0$时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,

因为当$x>1$时,$h(x)>0$,当$0<x<1$时,$h(x)<0$,所以$f(x)\geqslant g(x)$不恒成立. ………………………… (6分)

当$a>0$时,设$\varphi(x)=x^2e^x-a$,则$\varphi'(x)=e^x(x+2)x>0$,所以$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

又当$x>0$且$x\to0$时,$\varphi(x)\to-a$,当$x\to+\infty$时,$\varphi(x)\to+\infty$,

故$\exists x_0>0$,使得$\varphi(x_0)=0$.

当$x\in(0,x_0)$时,$\varphi(x)<0$,$h'(x)<0$,当$x\in(x_0,+\infty)$时,$\varphi(x)>0$,$h'(x)>0$.

因为$\varphi(x_0)=0$,所以$x_0^2e^{x_0}=a$. ……………………………………………………………………………… (8分)

故$h(x)_{\min}=h(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-a\ln x_0=(x_0-1)e^{x_0}-x_0^2e^{x_0}\ln x_0=x_0^2e^{x_0}\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0^2}-\ln x_0\right)\geqslant0$.

因为$x_0^2e^{x_0}>0$,所以只需$\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0^2}-\ln x_0\geqslant0$. ……………………………………………………………… (10分)

设$t(x)=x-x^2+\ln x$,则$t'(x)=1-2x+\frac{1}{x}=\frac{-(2x+1)(x-1)}{x}$.

当$x\in(0,1)$时,$t'(x)>0$,当$x\in(1,+\infty)$时,$t'(x)<0$,

所以$t(x)_{\max}=t(1)=0$,所以$x-x^2+\ln x\leqslant0$. ……………………………………………………………… (11分)

所以$\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0^2}-\ln x_0\leqslant0$,故$\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0^2}-\ln x_0=0$,

所以$\frac{1}{x_0}=1$,$x_0=1$,所以$a=e$,

故实数a的取值集合为$\{e\}$. ……………………………………………………………………………… (12分)

22. **解析** （Ⅰ）由$\begin{cases}x=t+\frac{1}{t},\\y=2\left(t-\frac{1}{t}\right)\end{cases}$（$t$为参数）消去参数$t$,可得曲线$E$的普通方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$. ………… (2分)

令$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}$可得直线$AB$的直角坐标方程为$x-\sqrt{3}y+1=0$,

故直线AB的倾斜角为$\frac{\pi}{6}$. ……………………………………………………………………………… (4分)

(Ⅱ)设 $P(x_0,y_0)$,

则直线 AB 的参数方程为 $\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}s, \\ y = y_0 + \dfrac{1}{2}s \end{cases}$ (s 为参数),

直线 CD 的参数方程为 $\begin{cases} x = x_0 + m\cos\beta, \\ y = y_0 + m\sin\beta \end{cases}$ (m 为参数). ……………………………… (5 分)

将直线 CD 的参数方程代入曲线 E 的方程可得

$(4\cos^2\beta - \sin^2\beta)m^2 + 2(4x_0\cos\beta - y_0\sin\beta)m + (4x_0^2 - y_0^2 - 16) = 0$. ……………………………… (6 分)

设 C,D 对应的参数分别为 m_1, m_2,

根据参数 m 的几何意义,可得 $|PC| \cdot |PD| = |m_1| \cdot |m_2| = \left| \dfrac{4x_0^2 - y_0^2 - 16}{4\cos^2\beta - \sin^2\beta} \right|$.

同理可得 $|PA| \cdot |PB| = \left| \dfrac{16x_0^2 - 4y_0^2 - 64}{11} \right|$.

所以 $\dfrac{|PA| \cdot |PB|}{|PC| \cdot |PD|} = \dfrac{|16\cos^2\beta - 4\sin^2\beta|}{11} = \dfrac{|10\cos 2\beta + 6|}{11}$. ……………………………… (8 分)

因为 $0 < \beta < \dfrac{\pi}{6}$,所以 $0 < 2\beta < \dfrac{\pi}{3}$,所以 $\dfrac{1}{2} < \cos 2\beta < 1$, ……………………………… (9 分)

故 $\dfrac{|PA| \cdot |PB|}{|PC| \cdot |PD|}$ 的取值范围为 $\left(1, \dfrac{16}{11}\right)$. ……………………………… (10 分)

23. 解析 (Ⅰ)由题可知 $f(x) = \begin{cases} -6, x \leqslant 0, \\ 4x - 6, 0 < x < 3, \\ 6, x \geqslant 3. \end{cases}$ ……………………………… (2 分)

由 $|f(x)| \leqslant 2$ 可得 $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$, ……………………………… (3 分)

所以 $-2 \leqslant 4x - 6 \leqslant 2$,所以 $1 \leqslant x \leqslant 2$.

故不等式 $|f(x)| \leqslant 2$ 的解集为 $[1,2]$,

所以 $a = 1, b = 2$. ……………………………… (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 $x^2 + 4y^2 = 32$,

所以 $(x+2y)^2 = x^2 + 4y^2 + 4xy = 32 + 2 \cdot x \cdot 2y \leqslant 32 + 2\left(\dfrac{x+2y}{2}\right)^2$,

所以 $-8 \leqslant x + 2y \leqslant 8$. ……………………………… (6 分)

设 $t = x + 2y$,则 $-8 \leqslant t \leqslant 8$,

$x + 2y - xy = x + 2y - \dfrac{1}{2}x \cdot 2y \geqslant x + 2y - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+2y}{2}\right)^2 = t - \dfrac{t^2}{8} = -\dfrac{1}{8}(t-4)^2 + 2$. ……………………………… (8 分)

因为函数 $g(t) = -\dfrac{1}{8}(t-4)^2 + 2$ 在 $(-8,4)$ 上单调递增,在 $(4,8)$ 上单调递减,

所以 $-\dfrac{1}{8}(t-4)^2 + 2 \geqslant -\dfrac{1}{8}(-8-4)^2 + 2 = -16$. ……………………………… (9 分)

故 $x + 2y - xy$ 的最小值为 -16,当且仅当 $x = -4, y = -2$ 时,等号成立. ……………………………… (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。