2024 届高三第二次学情检测

数学试题

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若复数 $(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=-2$，$a\in\mathrm{R}$，则 $a=$（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】利用复数的运算法则、复数的相等运算即可得解.

【详解】解：由题意，$\because(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=a-a^2\mathrm{i}+\mathrm{i}-a\mathrm{i}^2=2a+(1-a^2)\mathrm{i}=-2=-2+0\mathrm{i}$，

$\therefore\begin{cases}2a=-2\\1-a^2=0\end{cases}$，解得：$a=-1$.

故选：A.

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|\log_2(x-1)<0\}$，$B=\left\{x\middle|\frac{2}{x}\geq 1\right\}$，则（　　）

A. $\complement_U A=[2,+\infty)$　　B. $B\subseteq A$

C. $A\cap(\complement_U B)=\varnothing$　　D. $A\cup B=(-\infty,2]$

【答案】C

【解析】

【分析】先求出集合 A,B，再由交集，补集，并集的定义判断 A，C，D；由集合间的关系判断 B.

【详解】由 $\log_2(x-1)<0=\log_2 1$，则 $0<x-1<1$，解得：$1<x<2$，

所以 $A=\{x|1<x<2\}$，

由 $\frac{2}{x}\geq 1$ 可得 $\frac{2}{x}-1\geq 0$，即 $\frac{2-x}{x}\geq 0$，则 $\begin{cases}x(x-2)\leq 0\\x\neq 0\end{cases}$，

解得：$0<x\leq 2$，故 $B=\{x|0<x\leq 2\}$，故 B 错误；

故 $\complement_U A=\{x|x\leq 1$ 或 $x\geq 2\}$，故 A 错误；

$\complement_U B=\{x|x\leq 0$ 或 $x>2\}$，$A\cap(\complement_U B)=\varnothing$，故 C 正确；

$A\cup B=\left(0,2\right]$，故 D 错误.

故选：C.

3. 若 $f\left(x\right)=\left(x+a-1\right)\ln\dfrac{x-1}{x+1}$ 为偶函数，则 $a=$（　　）

A. -1　　　　B. 0　　　　C. $\frac{1}{2}$　　　　D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】求出函数的定义域，利用函数奇偶性的定义建立方程进行求解即可.

【详解】由 $\dfrac{x-1}{x+1}>0$，得 $x>1$ 或 $x<-1$，

由 $f(x)$ 是偶函数，$\therefore f(-x)=f(x)$，

得 $(-x+a-1)\ln\dfrac{-x-1}{-x+1}=(x+a-1)\ln\dfrac{x-1}{x+1}$，

即 $(-x+a-1)\ln\dfrac{x+1}{x-1}=(x+a-1)\ln\dfrac{x-1}{x+1}$，

即 $(-x+a-1)\ln(\dfrac{x-1}{x+1})^{-1}=(x+a-1)\ln\dfrac{x-1}{x+1}$，

则 $(x-a+1)\ln\dfrac{x-1}{x+1}=(x+a-1)\ln\dfrac{x-1}{x+1}$，

由于 $\ln\dfrac{x-1}{x+1}$ 不恒为 0，所以

$x-a+1=x+a-1$，得 $a=1$，

故选：D

4. 向量 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$，$\left|\vec{c}\right|=\sqrt{3}$ 且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则 $\cos\left\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\right\rangle=$（　　）

A. $\dfrac{13}{14}$　　　　B. $-\dfrac{13}{14}$　　　　C. $\dfrac{4}{5}$　　　　D. $-\dfrac{4}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用平面向量的数量积及模长计算夹角即可.

【详解】由已知可得 $\vec{c}=-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\Rightarrow\vec{c}^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$，

又 $\vec{a}-\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b},\vec{b}-\vec{c}=2\vec{b}+\vec{a}$，

所以 $\cos\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}=\dfrac{\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)}{\sqrt{4\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}\sqrt{4\vec{b}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}^2}}=\dfrac{2\vec{a}^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^2}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{13}{14}$.

故选：A

5. “$\sin\alpha+\cos\beta=0$”是“$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据充分条件、必要条件的概念，结合三角恒等式即可得结果.

【详解】若 $\sin\alpha+\cos\beta=0$，则 $\sin\alpha=-\cos\beta$，

所以 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$，即充分性成立；

若 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$，则 $\sin^2\alpha=\cos^2\beta$，即 $\sin\alpha=\pm\cos\beta$，

所以 $\sin\alpha+\cos\beta=0$ 不成立，

所以“$\sin\alpha+\cos\beta=0$”是“$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”的充分不必要条件，

故选：A.

6. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_4=-5$，$S_6=21S_2$，则 $S_8=$（　　）.

A. 120　　B. 85　　C. -85　　D. -120

【答案】C

【解析】

【分析】方法一：根据等比数列的前 n 项和公式求出公比，再根据 S_4,S_8 的关系即可解出；

方法二：根据等比数列的前 n 项和的性质求解.

【详解】方法一：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，首项为 a_1，

若 $q=-1$，则 $S_4=0\neq-5$，与题意不符，所以 $q\neq-1$；

若 $q=1$，则 $S_6=6a_1=3\times2a_1=3S_2\neq0$，与题意不符，所以 $q\neq1$；

由 $S_4=-5$，$S_6=21S_2$ 可得，$\dfrac{a_1\left(1-q^4\right)}{1-q}=-5$，$\dfrac{a_1\left(1-q^6\right)}{1-q}=21\times\dfrac{a_1\left(1-q^2\right)}{1-q}$ ①，

由①可得，$1+q^2+q^4=21$，解得：$q^2=4$，

所以 $S_8=\dfrac{a_1\left(1-q^8\right)}{1-q}=\dfrac{a_1\left(1-q^4\right)}{1-q}\times\left(1+q^4\right)=-5\times(1+16)=-85$.

故选：C．

方法二：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

因为$S_4=-5$，$S_6=21S_2$，所以$q\neq -1$，否则$S_4=0$，

从而，$S_2,S_4-S_2,S_6-S_4,S_8-S_6$成等比数列，

所以有，$(-5-S_2)^2=S_2(21S_2+5)$，解得：$S_2=-1$或$S_2=\frac{5}{4}$，

当$S_2=-1$时，$S_2,S_4-S_2,S_6-S_4,S_8-S_6$，即为$-1,-4,-16,S_8+21$，

易知，$S_8+21=-64$，即$S_8=-85$；

当$S_2=\frac{5}{4}$时，$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=(a_1+a_2)(1+q^2)=(1+q^2)S_2>0$，

与$S_4=-5$矛盾，舍去．

故选：C．

【点睛】本题主要考查等比数列的前n项和公式的应用，以及整体思想的应用，解题关键是把握S_4,S_8的关系，从而减少相关量的求解，简化运算．

7. 已知$\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$，则$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】已知等式利用两角和的正弦公式和辅助角公式化简得$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，再利用诱导公式求$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$的值.

【详解】由$\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$，

得$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：B

8. 已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x+2)=-f(x)$，且 $\forall x_1$，$x_2\in(1,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$. 若 $\forall x>1$，$f(2-x-a)+f(\ln(x-1))\leq 0$ 恒成立，则 a 的取值范围为（　　）

A. $[-2,0)$　　　　B. $[-2,+\infty)$　　　　C. $(-2,+\infty)$　　　　D. $\left[-2,\dfrac{1}{2}\right]$

【答案】B

【解析】

【分析】由 $f(-x+2)=-f(x)$ 得到 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，再由 $\forall x_1$，$x_2\in(1,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 得到 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，再将 $f(2-x-a)+f(\ln(x-1))\leq 0$，转化为 $f(\ln(x-1))\leq -f(2-x-a)=f(x+a)$，从而有 $x+a\geq \ln(x-1)$，即 $a\geq \ln(x-1)-x$，$x>1$，然后令 $h(x)=\ln(x-1)-x$，$x>1$，用导数法求得其最大值即可.

【详解】解：由 $f(-x+2)=-f(x)$，得 $f(-x+2)+f(x)=0$，故 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称.

因为 $\forall x_1$，$x_2\in(1,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f(2-x-a)+f(\ln(x-1))\leq 0$，

所以 $f(\ln(x-1))\leq -f(2-x-a)=f(x+a)$，

所以 $x+a\geq \ln(x-1)$，即 $a\geq \ln(x-1)-x$，$x>1$.

令 $h(x)=\ln(x-1)-x$，$x>1$，

则 $h'(x)=\dfrac{1}{x-1}-1=\dfrac{2-x}{x-1}$.

当 $1<x<2$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x>2$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

所以 $h(x)_{\max}=h(2)=-2$，所以 $a\geq -2$.

故选：B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知$a>b$，则（　　）

A. $\ln\left(a^2+1\right)>\ln\left(b^2+1\right)$　　B. $a^3>b^3$

C. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

【答案】BD

【解析】

【分析】根据对数函数$y=\ln x$的单调性及取特殊值$a=-1$，$b=-2$，即可判断A；根据幂函数$y=x^3$的单调性即可判断B；取特殊值$a=1$，$b=-1$即可判断C；根据指数函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的单调性即可判断D.

【详解】对于A，由函数$y=\ln x$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又$a>b$，不妨取$a=-1$，$b=-2$，此时$a^2+1<b^2+1$，

所以$\ln\left(a^2+1\right)<\ln\left(b^2+1\right)$，故A错误；

对于B，由函数$y=x^3$在$\mathbf{R}$上单调递增，又$a>b$，所以$a^3>b^3$，所以B正确；

对于C，由$a>b$，不妨取$a=1$，$b=-1$，此时$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故C错误；

对于D，由函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$在$\mathbf{R}$上单调递减，又$a>b$，所以$\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$，故D正确.

故选：BD.

10. 已知函数$f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的一个极大值点为1，与该极大值点相邻的一个零点为$-1$，将$f(x)$的图象向左平移1个单位长度后得到函数$g(x)$的图象，则下列结论正确的是（　　）

A. $f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)$

B. $f(x)$在区间$(6,9)$上单调递增

C. $g(x)$为奇函数

D. 若$g(x)$在区间$[-1,a]$上的值域为$\left[-\sqrt{2},2\right]$，则$a=3$.

【答案】BD

【解析】

【分析】对于 A，根据余弦型函数的图象与性质进行判断；对于 B，由余弦型函数增区间公式得出结果；对于 C，根据图象平移变换及函数奇偶性定义进行判断；对于 D，根据余弦型函数的定义域、值域的关系以及图像与性质得出结果.

【详解】设 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 T，由题意，$\frac{T}{4}=1-\left(-1\right)=2$，得 $T=8=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=\frac{\pi}{4}$，

所以 $f\left(x\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}x+\varphi\right)$，又点 $\left(-1,0\right)$ 在 $f\left(x\right)$ 的图象上，所以 $2\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=0$，

所以 $-\frac{\pi}{4}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，

对于 A，因为 $f\left(x\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$，故 A 错误；

对于 B，令 $-\pi+2k\pi\le\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\le 2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $8k-3<x<8k+1$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[8k-3,8k+1\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，

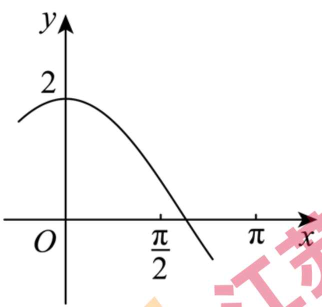
当 $k=1$ 时，单调递增区间为 $\left(5,9\right)$，故 B 正确；

对于 C，因为 $g\left(x\right)=f\left(x+1\right)=2\cos\left[\frac{\pi}{4}\left(x+1\right)-\frac{\pi}{4}\right]=2\cos\frac{\pi}{4}x$，

所以 $g\left(x\right)$ 为偶函数，故 C 错误；

对于 D，当 $x\in\left[-1,a\right]$ 时，$\frac{\pi}{4}x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi a}{4}\right]$，又 $g\left(x\right)$ 的值域为 $\left[-\sqrt{2},2\right]$，如图，

当 $x=0$ 时，$g\left(0\right)=2$，



所以 $\frac{\pi a}{4}=\frac{3\pi}{4}$，解得 $a=3$，故 D 正确.

故选：BD.

11. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，内角 B 的平分线交 AC 于点

D 且 $BD=\sqrt{3}$，则下列结论正确的是（　　）

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$　　　　B. b 的最小值是 2

C. $a+3c$ 的最小值是 $4\sqrt{3}$　　　　D. $\triangle ABC$ 的面积最小值是 $\sqrt{3}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】由三角形面积公式寻找 a，c 关系，再利用基本不等式判断.

【详解】解：由题意得：$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$，

由角平分线以及面积公式得 $\frac{1}{2}ac\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sqrt{3}a\times\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sqrt{3}c\times\sin\frac{\pi}{6}$，

化简得 $ac=a+c$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$，故 A 正确；

$\therefore ac=a+c\geq 2\sqrt{ac}$，当且仅当 $a=c$ 时取等号，

$\therefore \sqrt{ac}\geq 2$，$\therefore ac\geq 4$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}ac\geq\sqrt{3}$，当且仅当 $a=c=2$ 时取等号，故 D 正确；

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle ABC=a^2+c^2-ac$

$=(a+c)^2-3ac=(ac)^2-3ac\geq 4^2-3\times 4=4$

所以 $b\geq 2$，即 b 的最小值是 2，当且仅当 $a=c=2$ 时取等号，故 B 正确；

对于选项 C：由 $ac=a+c$ 得：$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$，

$\therefore a+3c=(a+3c)\times(\frac{1}{a}+\frac{1}{c})=1+\frac{a}{c}+\frac{3c}{a}+3\geq 4+2\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{3c}{a}}=4+2\sqrt{3}$，

当且仅当 $\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1\\ \frac{a}{c}=\frac{3c}{a}\end{cases}$，即 $\begin{cases}a=1+\sqrt{3}\\ c=1+\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$ 时取等号，故 C 错误；

故选：ABD.

12. 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)+f(-x-2)=0,f(1+x)$ 为偶函数，则（　　）

A. $f(-1-x)+f(-1+x)=0$　　　　B. $f(1-x)=f(1+x)$

C. $f(x-4)=f(x)$　　　　D. $f(2023)=0$

【答案】BC

【解析】

【分析】由已知条件得到函数 $f(x)$ 的奇偶性和对称性，对选项进行验证.

【详解】由 $f(x+2)+f(-x-2)=0$，令 $x+2=t$，则有 $f(t)+f(-t)=0$，

即 $f(x)$ 为奇函数，$f(0)=0$，

由 $f(1+x)$ 为偶函数，$f(x)$ 的对称轴为 $x=1$，得 $f(1+x)=f(1-x)$，故 B 选项正确；

则有 $f(x)=f(2-x)$，可得 $f(-x)=-f(2-x)$

即有 $f(x)=-f(2+x)=f(4+x)$，

所以 $f(x)$ 是周期函数，且周期为 4（不一定是最小正周期），C 选项正确；

$f(-1-x)=-f(1+x)=-f(1-x)=f(-1+x)$，故 A 选项错误；

$f(2023)=f(506\times4-1)=f(-1)=-f(1)$，已知条件不能得到 $f(1)$ 的值，D 选项错误.

故选：BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-\log_2 x, x\geq1\\4^x, x<1\end{cases}$，则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=$________.

【答案】1

【解析】

【分析】代入计算即可.

【详解】由函数 $f(x)=\begin{cases}2-\log_2 x, x\geq1\\4^x, x<1\end{cases}$，有 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(2)=1$.

故答案为：1

14. 已知向量 $\vec{a}=(\cos\alpha,-2)$，$\vec{b}=(1,\sin\alpha)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\frac{\sin2\alpha}{2\cos^2\alpha+3}=$________.

【答案】$\frac{4}{23}$

【解析】

【分析】根据向量垂直可得 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，即可弦切互化求解.

【详解】由 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 可得 $\cos\alpha-2\sin\alpha=0\Rightarrow\tan\alpha=\frac{1}{2}$，

所以$\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha+3}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+3\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{5+3\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{5+\dfrac{3}{4}}=\dfrac{4}{23}$，

故答案为：$\dfrac{4}{23}$

15. 在锐角三角形ABC，$AB=2$，且$\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}=\dfrac{4}{\tan C}$，则$AB$边上的中线长为________.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据题设条件整理得$\sin^2 C=4\sin A\sin B\cos C$，再利用正弦定理和余弦定理得到$a^2+b^2=\dfrac{3}{2}c^2$，进而利用向量的数量积运算求得$\overrightarrow{CD}^2$，由此得解.

【详解】因为$\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}=\dfrac{4}{\tan C}$，所以$\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\cos B}{\sin B}=\dfrac{4\cos C}{\sin C}$，

整理得$\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\sin A\sin B}=\dfrac{4\cos C}{\sin C}$，即$\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\dfrac{4\cos C}{\sin C}$，

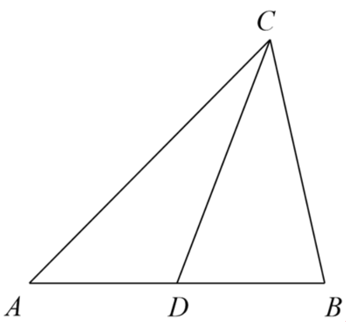
即$\dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}=\dfrac{4\cos C}{\sin C}$，即$\sin^2 C=4\sin A\sin B\cos C$，

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，可得$c^2=4ab\cos C$，

又由余弦定理得$2ab\cos C=a^2+b^2-c^2$，

所以$c^2=2\left(a^2+b^2-c^2\right)$，即$a^2+b^2=\dfrac{3}{2}c^2$，则$2ab\cos C=a^2+b^2-c^2=\dfrac{3}{2}c^2-c^2=\dfrac{1}{2}c^2$，

假设AB的中点为D，则$\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$，所以$\overrightarrow{CD}^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\right)$，



则$CD^2=\dfrac{1}{4}\left(b^2+a^2+2ab\cos C\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}c^2+\dfrac{1}{2}c^2\right)=\dfrac{1}{2}c^2=\dfrac{1}{2}\times AB^2=\dfrac{1}{2}\times 2^2=2$，

所以$CD=\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{2}$.

16. 已知直线l与曲线$y=e^{x-1}$和$y=\ln(x+1)$都相切，请写出符合条件的两条直线l的方程：______，

______.

【答案】 ①. $y=x$ ②. $y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}$

【解析】

【分析】设出切点，利用切点求出切线方程，联立方程求出切点处的值，代入求出切线方程.

【详解】因为 $y=e^{x-1}$， $y=\ln(x+1)$，所以 $y'=e^{x-1}$， $y'=\frac{1}{x+1}$，

设直线 l 与曲线 $y=e^{x-1}$ 和 $y=\ln(x+1)$ 分别切于点 $\left(x_1,e^{x_1-1}\right)$，$\left(x_2,\ln\left(x_2+1\right)\right)$，

所以切线方程分别为 $y=e^{x_1-1}\left(x-x_1\right)+e^{x_1-1}$， $y=\frac{1}{x_2+1}\left(x-x_2\right)+\ln\left(x_2+1\right)$，

即 $y=e^{x_1-1}x-x_1e^{x_1-1}+e^{x_1-1}$， $y=\frac{1}{x_2+1}x-\frac{x_2}{x_2+1}+\ln\left(x_2+1\right)$，

因此 $e^{x_1-1}=\frac{1}{x_2+1}$，则 $x_1-1=-\ln\left(x_2+1\right)$，

又 $-x_1e^{x_1-1}+e^{x_1-1}=\frac{-x_2}{x_2+1}+\ln\left(x_2+1\right)$，

所以 $-x_1e^{x_1-1}+e^{x_1-1}=\left[\ln\left(x_2+1\right)-1\right]\cdot\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{-x_2}{x_2+1}+\ln\left(x_2+1\right)$，

化简得 $\left[1-\ln\left(x_2+1\right)\right]\cdot\frac{x_2}{x_2+1}=0$，

解得 $x_2=0$ 或 $x_2=e-1$，

当 $x_2=0$ 时，切线方程为 $y=x$，

当 $x_2=e-1$ 时，切线方程为 $y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}$.

故答案为： $y=x$， $y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列， a_1 为 a_2， a_3 的等差中项.

（1）求 $\{a_n\}$ 的公比；

（2）若 $a_1=1$，求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

【答案】(1) -2；(2) $S_n=\dfrac{1-(1+3n)(-2)^n}{9}$.

【解析】

【分析】(1) 由已知结合等差中项关系，建立公比q的方程，求解即可得出结论；

(2) 由 (1) 结合条件得出$\{a_n\}$的通项，根据$\{na_n\}$的通项公式特征，用错位相减法，即可求出结论.

【详解】(1) 设$\{a_n\}$的公比为q，a_1为a_2,a_3的等差中项，

$\because 2a_1=a_2+a_3,a_1\neq 0,\therefore q^2+q-2=0$，

$\because q\neq 1,\therefore q=-2$；

(2) 设$\{na_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1,a_n=(-2)^{n-1}$，

$S_n=1\times 1+2\times(-2)+3\times(-2)^2+\cdots+n(-2)^{n-1}$，①

$-2S_n=1\times(-2)+2\times(-2)^2+3\times(-2)^3+\cdots(n-1)(-2)^{n-1}+n(-2)^n$，②

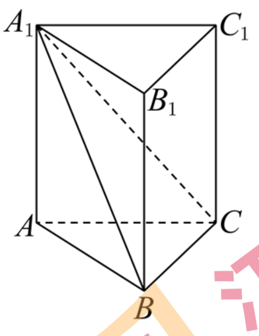
①−②得，$3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n(-2)^n$

$=\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)}-n(-2)^n=\dfrac{1-(1+3n)(-2)^n}{3}$，

$\therefore S_n=\dfrac{1-(1+3n)(-2)^n}{9}$.

【点睛】本题考查等比数列通项公式基本量的计算、等差中项的性质，以及错位相减法求和，考查计算求解能力，属于基础题.

18. 如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=BC=2,AA_1=3$，平面$A_1BC\perp$平面A_1ABB_1.



(1) 求证：$AB\perp BC$；

(2) 求二面角$A-A_1C-B$的正弦值.

【答案】(1) 证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{442}}{26}$

【解析】

【分析】（1）过点 A 作 $AD\perp A_1B$，根据题意证得 $AD\perp$ 平面 A_1BC，得到 $AD\perp BC$，再由三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，证得 $AA_1\perp BC$，利用线面垂直的判定定理，证得 $BC\perp$ 平面 A_1ABB_1，即可得到 $AB\perp BC$；

（2）以点 B 为坐标原点，建立空间直角坐标系，分别求得平面 AA_1C 和平面 A_1BC 的一个法向量 $\vec{n}=(1,1,0)$ 和 $\vec{m}=(0,3,-2)$，结合向量的夹角公式，即可求解.

【小问 1 详解】

如图所示，过点 A 作 $AD\perp A_1B$ 于点 D，

因为平面 $A_1BC\perp$ 平面 A_1ABB_1，平面 $A_1BC\cap$ 平面 $A_1ABB_1=A_1B$，

且 $AD\subset$ 平面 A_1ABB_1，所以 $AD\perp$ 平面 A_1BC，

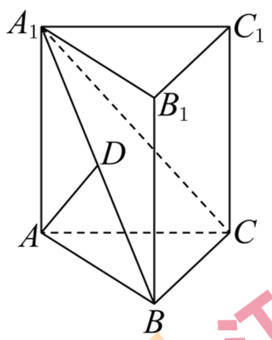
又因为 $BC\subset$ 平面 A_1BC，所以 $AD\perp BC$，

由三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，可得 $AA_1\perp$ 平面 ABC，

因为 $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp BC$，

又因为 $AD\cap AA_1=A$，且 $AD,AA_1\subset$ 平面 A_1ABB_1，所以 $BC\perp$ 平面 A_1ABB_1，

因为 $AB\subset$ 平面 A_1ABB_1，所以 $AB\perp BC$.



【小问 2 详解】

如图所示，以点 B 为坐标原点，以 BC,BA,BB_1 所在的直线分别为 x 轴、y 轴和 z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，

因为 $AB=BC=2,AA_1=3$，可得 $A(0,2,0),B(0,0,0),C(2,0,0),A_1(0,2,3)$，

则 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,3),\overrightarrow{AC}=(2,-2,0),\overrightarrow{BA_1}=(0,2,3),\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$，

设平面 AA_1C 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=3z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2x-2y=0\end{cases}$，

取 $x=1$，可得 $y=1,z=0$，所以 $\vec{n}=(1,1,0)$，

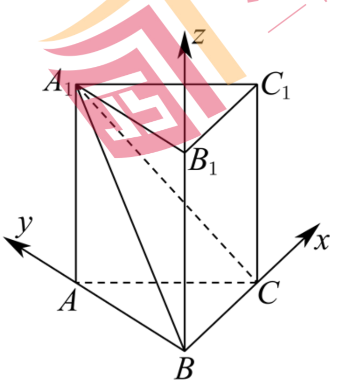
设平面 A_1BC 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}=2b+3c=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=2a=0\end{cases}$，

取 $b=3$，可得 $a=0,c=-2$，所以 $\vec{m}=(0,3,-2)$，

则 $\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\times\sqrt{13}}=\dfrac{3}{\sqrt{26}}$，

设二面角 $A-A_1C-B$ 的平面角为 θ 为锐角，可得 $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{26}}$，所以 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{442}}{26}$，

即二面角 $A-A_1C-B$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{442}}{26}$.



19. 已知函数 $f(x)=\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x+m$ 的最大值为 1.

（1）求常数 m 的值；

（2）若 $f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)=\dfrac{1}{5}$，$x_0\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$，求 $\cos 2x_0$ 的值.

【答案】（1）$m=-1$

（2）$\dfrac{7+24\sqrt{3}}{50}$

【解析】

【分析】（1）根据辅助角公式化简可得 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+m$，然后根据正弦函数的性质，即可得出

答案；

（2）根据已知可得出 $\sin\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，$\cos\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，然后根据二倍角公式得出 $\sin 2\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right),\cos 2\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值，根据两角差的余弦公式，即可得出答案.

【小问 1 详解】

$f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+m=2\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)+m$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+m$，

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，即 $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$ 时，$f(x)_{\max}=2+m=1$，

所以 $m=-1$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$.

由 $f\left(\frac{x_0}{2}\right)=\frac{1}{5}$ 得，$2\sin\left(2\times\frac{x_0}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-1=\frac{1}{5}$，所以 $\sin\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$.

又 $x_0\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，所以 $x_0+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，

所以 $\cos\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin 2\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{24}{25}$，

$\cos 2\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{25}$，

所以 $\cos 2x_0=\cos\left[2\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\cos 2\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\left(x_0+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{7}{25}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{24}{25}=\frac{7+24\sqrt{3}}{50}$.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n，且 $a_n+T_n=1$.

（1）求证：数列$\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$是等差数列；

（2）证明：$\frac{a_2-a_1}{a_1}+\frac{a_3-a_2}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}<\frac{3}{4}$.

【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据等差数列的定义，$\frac{1}{T_n}-\frac{1}{T_{n-1}}$为定值即可证明.

（2）由结合（1）求T_n的通项公式，进而得$\{a_n\}$，再把$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$化简代入求值，从而即可证明.

【小问1详解】

由数列$\{a_n\}$的前n项积为T_n，得$T_n=a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}\cdot a_n$，又$a_n+T_n=1$，

所以，当$n\geq 2$时，$\frac{T_n}{T_{n-1}}+T_n=1$，整理得$T_n(\frac{1}{T_{n-1}}+1)=1$，即$\frac{1}{T_{n-1}}+1=\frac{1}{T_n}$，

所以，当$n\geq 2$时，$\frac{1}{T_n}-\frac{1}{T_{n-1}}=1$为定值，

所以数列$\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$是等差数列.

【小问2详解】

因为$a_n+T_n=1$，令$n=1$，得$a_1+T_1=1$，$a_1=\frac{1}{2}$，故$\frac{1}{T_1}=2$，

结合（1）可知，$\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$是首项为2，公差为1的等差数列，

所以$\frac{1}{T_n}=n+1$，得$T_n=\frac{1}{n+1}$.

所以，当$n\geq 2$时，$a_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}$，

显然$a_1=\frac{1}{2}$符合上式，

所以$a_n=\dfrac{n}{n+1}$.

所以$\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\dfrac{\dfrac{n+1}{n+2}-\dfrac{n}{n+1}}{\dfrac{n}{n+1}}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$,

故$\dfrac{a_2-a_1}{a_1}+\dfrac{a_3-a_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right)$.

因为$n\in\mathrm{N}^*$，$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}>0$，

所以$\dfrac{a_2-a_1}{a_1}+\dfrac{a_3-a_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right)<\dfrac{3}{4}$.

21. 在$\triangle ABC$中，A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$b^2=c(a+c)$.

（1）若$B=\dfrac{\pi}{3}$，求$\dfrac{a}{c}$的值；

（2）若$\triangle ABC$是锐角三角形，求$\sqrt{3}\sin B+2\cos^2 C$的取值范围.

【答案】（1）$\dfrac{a}{c}=2$

（2）$\left(\sqrt{3}+1,3\right)$

【解析】

【分析】（1）根据题意利用余弦定理即可求解.

（2）先利用余弦定理、正弦定理、两角和差公式得$B=2C$，再把$\sqrt{3}\sin B+2\cos^2 C$化简到同一个角的三角函数，最后利用正弦函数的单调性确定取值范围.

【小问 1 详解】

在$\triangle ABC$中，$B=\dfrac{\pi}{3}$，据余弦定理可得$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B=a^2+c^2-ac$，

又$b^2=c^2+ac$，故$a^2-ac=ac$，即$a^2=2ac$，

又$a>0$，故$a=2c$，得$\dfrac{a}{c}=2$.

【小问 2 详解】

在 $\triangle ABC$ 中，据余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，

又 $b^2=c^2+ac$，故 $a^2+c^2-2ac\cdot\cos B=c^2+ac$，即 $a^2-2ac\cdot\cos B=ac$，

又 $a>0$，故 $a-2c\cdot\cos B=c$.

据正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，可得 $\sin A-2\sin C\cos B=\sin C$，

所以 $\sin\left[\pi-(B+C)\right]-2\sin C\cos B=\sin C$，

即 $\sin(B+C)-2\sin C\cos B=\sin C$，$\sin B\cos C+\cos B\sin C-2\sin C\cos B=\sin C$

所以 $\sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin C$，$\sin(B-C)=\sin C$，

因为 $A,B,C\in(0,\pi)$，所以 $B-C\in(-\pi,\pi)$，$B-C=C$ 或 $B-C+C=\pi$，

即 $B=2C$ 或 $B=\pi$（舍）.

所以 $\sqrt{3}\sin B+2\cos^2 C=\sqrt{3}\sin 2C+\cos 2C+1=2\sin\left(2C+\dfrac{\pi}{6}\right)+1$.

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<A=\pi-3C<\dfrac{\pi}{2},\\ 0<B=2C<\dfrac{\pi}{2},\\ 0<C<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 得 $\dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $\dfrac{\pi}{2}<2C+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$，故 $\sin\left(2C+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，

$2\sin\left(2C+\dfrac{\pi}{6}\right)+1\in\left(\sqrt{3}+1,3\right)$，

所以 $\sqrt{3}\sin B+2\cos^2 C$ 的取值范围是 $\left(\sqrt{3}+1,3\right)$.

22. 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1), g(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+x$.

（1）求证：$f'(x-1)\le 2\sqrt{x}-1$；

（2）若函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在最大值，求 a 的取值范围.

【答案】（1）证明见解析

（2）$(0,1)$

【解析】

【分析】（1）根据题意，求得 $f'(x-1)=\ln x+1$，令 $m(x)=\ln x^2-2x+2$，求得 $m'(x)=\frac{2}{x}-2$，得到函数 $m(x)$ 的单调性，结合 $m(x)\le m(1)=0$，即可得到 $f'(x-1)\le 2\sqrt{x}-1$；

（2）根据题意得到 $h(x)=(x+1)\ln(x+1)-\frac{1}{2}ax^2-x,x>-1$，求得 $h'(x)=\ln(x+1)-ax$，令 $\varphi(x)=h'(x)=\ln(x+1)-ax$，得到 $\varphi'(x)=\frac{1}{x+1}-a$，分 $a\le 0$，$a\ge 1$ 和 $0<a<1$，三种情况讨论，结合零点的存在性定理和函数的单调性、极值（最值）的定义，即可求解.

【小问 1 详解】

解：由函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$，可得 $f'(x)=\ln(x+1)+1$，则 $f'(x-1)=\ln x+1$，

令 $m(x)=\ln x^2-2x+2$，可得 $m'(x)=\frac{2}{x}-2$，

当 $x\in(0,1)$ 时，可得 $m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，可得 $m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减，

所以 $m(x)\le m(1)=0$，所以 $m(\sqrt{x})=\ln x-2\sqrt{x}+2\le 0$，

即 $\ln x+1\le 2\sqrt{x}-1$，即 $f'(x-1)\le 2\sqrt{x}-1$.

【小问 2 详解】

解：由函数 $h(x)=f(x)-g(x)=(x+1)\ln(x+1)-\frac{1}{2}ax^2-x,x>-1$

可得 $h'(x)=\ln(x+1)+1-ax-1=\ln(x+1)-ax$

令 $\varphi(x)=h'(x)=\ln(x+1)-ax$，可得 $\varphi'(x)=\frac{1}{x+1}-a$

①当 $a\le 0$ 时，$\varphi'(x)>0$，$h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h'(x)>h'(0)=0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无最大值；

②当 $a\ge 1$ 时，$\varphi'(x)=\frac{1}{x+1}-a<1-a\le 0$，可得 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h'(x)<h'(0)=0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，无最大值；

③当 $0<a<1$ 时，由 $\varphi'(x)=\frac{1}{x+1}-a=0$，可得 $x=\frac{1}{a}-1>0$，

所以当 $x\in(0,\frac{1}{a}-1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a}-1)$ 上单调递增；

当 $x\in(\frac{1}{a}-1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(\frac{1}{a}-1,+\infty)$ 上单调递减，

由（1）知，$\ln x\le 2\sqrt{x}-1$，

所以当$x>0$时，$\varphi(x)<2\sqrt{x+1}-2-ax<2\sqrt{x+1}-a(x+1)=\sqrt{x+1}(2-a\sqrt{x+1})$，

取$t=\dfrac{4}{a^2}-1$，则$t>\dfrac{1}{a}-1$且$\varphi(t)<\sqrt{t+1}(2-a\sqrt{t+1})=0$，

又由$\varphi(\dfrac{1}{a}-1)>\varphi(0)=0$，

所以由零点的存在性定理，存在$x_0\in(\dfrac{1}{a}-1,t)$，使得$\varphi(x_0)=0$，

所以当$x\in(0,x_0)$时，$\varphi(x)>0$，即$h'(x)>0$；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$\varphi(x)<0$，即$h'(x)<0$，

所以$h(x)$在$(0,x_0)$单调递增，在$(x_0,+\infty)$单调递减，

此时$h(x)$在$(0,+\infty)$上存在最大值$h(x_0)$，符合题意，

综上所述，实数a的取值范围是$(0,1)$.

【点睛】方法技巧：已知函数零点（方程根）的个数，求参数的取值范围问题的三种常用方法：

1、直接法，直接根据题设条件构建关于参数的不等式（组），再通过解不等式（组）确定参数的取值范围

2、分离参数法，先分离参数，将问题转化成求函数值域问题加以解决；

3、数形结合法，先对解析式变形，在同一平面直角坐标系中作出函数的图象，然后数形结合求解.

结论拓展：与e^x和$\ln x$相关的常见同构模型

①$ae^a\le b\ln b\Leftrightarrow e^a\ln e^a\le b\ln b$，构造函数$f(x)=x\ln x$或$g(x)=xe^x$；

②$\dfrac{e^a}{a}<\dfrac{b}{\ln b}\Leftrightarrow\dfrac{e^a}{\ln e^a}<\dfrac{b}{\ln b}$，构造函数$f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$或$g(x)=\dfrac{e^x}{x}$；

③$e^a\pm a>b\pm\ln b\Leftrightarrow e^a\pm\ln e^a>b\pm\ln b$，构造函数$f(x)=x\pm\ln x$或$g(x)=e^x\pm x$.