

# 河南省信阳高级中学 2022-2023 学年高三下期 04 月测试

## (一) 文数试题

### 第 1 卷(选择题, 共 60 分)

一、选择题(本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知复数  $z = \frac{1-5i}{1+i}$ , 则复数  $z$  的虚部为

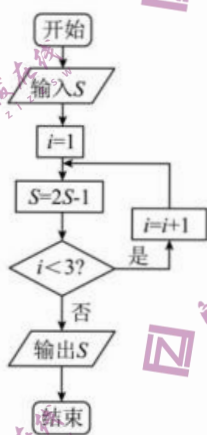
- A. -3                      B. 3                      C.  $-3i$                       D.  $3i$

2. 已知全集  $U = \mathbb{R}$ , 集合  $A = \{x | x^2 - x - 6 > 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} | |x-2| < 3\}$ , 则

$(C_U A) \cap B =$

- A.  $(-1, 3]$                       B.  $[-1, 3]$                       C.  $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$                       D.  $\{0, 1, 2, 3\}$

3. 执行如图所示的程序框图, 若输入的  $S$  值为 2, 则输出的  $S$  值为



- A. 3                      B. 5                      C. 9                      D. 17

4. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 直线  $m, n$  分别在平面  $ABCD$  和  $ABB_1A_1$  内, 且  $m \perp n$ , 则下列命题中正确的是

- A. 若  $m$  垂直于  $AB$ , 则  $n$  垂直于  $AB$                       B. 若  $m$  垂直于  $AB$ , 则  $n$  不垂直于  $AB$   
C. 若  $m$  不垂直于  $AB$ , 则  $n$  垂直于  $AB$                       D. 若  $m$  不垂直于  $AB$ , 则  $n$  不垂直于  $AB$

5. 已知一组正数  $x_1, x_2, x_3$  的方差  $s^2 = \frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 12)$ , 则数据

$3x_1 - 1, 3x_2 - 1, 3x_3 - 1$  的平均数为

- A. 1                      B. 3                      C. 5                      D. 7

6. 使  $p: \forall x > 0, x + \frac{4}{x} \geq a$  的否定为假命题的一个充分不必要条件是

- A.  $a \geq 4$                       B.  $a \leq 4$                       C.  $a \geq 2$                       D.  $a \leq 2$

7. 已知  $\vec{a} = (x, 1), \vec{b} = (2, 2x + 3)$ , 若  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为钝角, 则  $x$  的取值范围为

- A.  $\left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$                       B.  $(-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{3}{4}\right)$   
C.  $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$                       D.  $\left(-2, -\frac{3}{4}\right] \cup \left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$

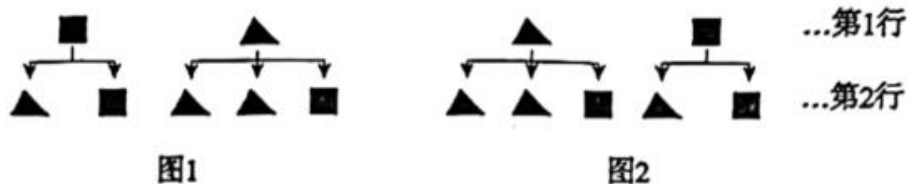
8. 若  $4^x = 5^y = 3, z = \log_x y$ , 则  $x, y, z$  的大小关系为

- A.  $y < x < z$                       B.  $z < x < y$                       C.  $x < y < z$                       D.  $z < y < x$

9. 已知  $F_1, F_2$  是椭圆与双曲线的公共焦点,  $P$  是它们的一个公共点, 且  $|PF_1| > |PF_2|$ , 线段  $PF_1$  的垂直平分线过  $F_2$ , 若椭圆的离心率为  $e_1$ , 双曲线的离心率为  $e_2$ , 则  $\frac{2}{e_1} + \frac{e_2}{2}$  的最小值为

- A.  $\sqrt{6}$                                       B. 3  
C. 6    D.  $\sqrt{3}$

10. 中国公民身份证号码编排规定, 女性公民的顺序码为偶数, 男性为奇数, 反映了性别与数字之间的联系; 数字简谱以 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 代表音阶中的 7 个基本音阶, 反映了音乐与数字之间的联系, 同样我们可以对几何图形赋予新的含义, 使几何图形与数字之间建立联系. 如图 1, 我们规定 1 个正方形对应 1 个三角形和 1 个正方形, 1 个三角形对应 1 个正方形, 在图 2 中, 第 1 行有 1 个正方形和 1 个三角形, 第 2 行有 2 个正方形和 1 个三角形, 则在第 9 行中的正方形的个数为



- A. 53                                      B. 55                                      C. 57                                      D. 59

11. 记  $\max\{p, q\} = \begin{cases} p, & p \geq q \\ q, & q > p \end{cases}$ , 设函数  $f(x) = \max\left\{e^{x-2} - 1, -x^2 + mx - \frac{1}{2}\right\}$ , 若函数

$f(x)$  恰有三个零点, 则实数  $m$  的取值范围的是

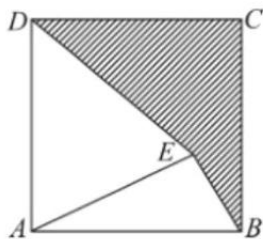
A.  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

B.  $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \frac{9}{4})$

C.  $(-\infty, -\frac{9}{4}) \cup (\sqrt{2}, \frac{9}{4})$

D.  $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

12. 如图， $E$  是正方形  $ABCD$  内一点，且满足  $AE \perp BE$ ， $AD = DE$ ，在正方形  $ABCD$  内随机投一个点，则该点落在图中阴影部分的概率是



A.  $\frac{3}{10}$

B.  $\frac{2}{5}$

C.  $\frac{4}{9}$

D.  $\frac{3}{5}$

第 II 卷（非选择题，共 90 分）

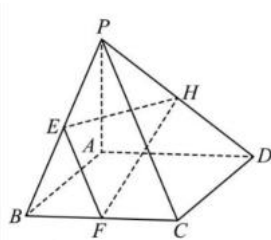
二. 填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 定义“等和数列”：在一个数列中，如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数，那么这个数列叫做等和数列，这个常数叫做该数列的公和。已知数列  $\{a_n\}$  是等和数列，且  $a_1 = 2$ ，公和为 5，那么  $a_8$  的值为\_\_\_\_\_。

14. 已知  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ 2x + 3y \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，若  $z = ax + y$  的最大值为 4，则  $a =$ \_\_\_\_\_。

15. 圆心在曲线  $y = -\frac{3}{x} (x > 0)$  上，且与直线  $3x - 4y + 3 = 0$  相切的面积最小的圆的方程是\_\_\_\_\_。

16. 如图，已知在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是菱形，且  $\angle BAD = 120^\circ$ ， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ， $PA = AB = 4$ ， $E, F, H$  分别是棱  $PB, BC, PD$  的中点，对于平面  $EFH$  截四棱锥  $P-ABCD$  所得的截面多边形，有以下几个结论：



①截面的面积等于  $4\sqrt{6}$ ；

②截面是一个五边形且只与四棱锥  $P-ABCD$  四条侧棱中的三条相交；

③截面与底面所成锐二面角为  $45^\circ$ ；

④截面在底面的投影面积为  $5\sqrt{3}$ 。

其中，正确结论的序号是\_\_\_\_\_。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(一) 必考题：全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》共 60 分。

17. (12 分) 某市自 2021 年 1 月启动对“车不让人行为”处罚以来，斑马线前机动车抢行不文明行为得以根本改变，但作为交通重要参与者的行人，闯红灯通行却频有发生，带来了较大的交通安全隐患，同时也使机动车的通畅率降低。该市交警部门在某十字路口根据以往的检测数据，得到行人闯红灯的概率约为 0.4，并从穿越该路口的行人中随机抽取了 200 人进行调查，对是否存在闯红灯情况得到如下  $2 \times 2$  列联表：

	30 岁及以下	30 岁以上	总计
闯红灯		60	
未闯红灯	80		
总计			200

近期，为了整顿“行人闯红灯”这一项不文明及违法行为，交警部门在该十字路口对闯红灯行人试行经济处罚，并在试行经济处罚后从穿越该路口的行人中随机抽取了 200 人进行调查，得到下表：

处罚金额 (单位：元)	5	10	15	20
闯红灯人数	50	40	20	0

将统计数据所得频率作为概率，完成下列问题。

(1) 将  $2 \times 2$  列联表填写完整 (不需写出填写过程)，并根据表中数据分析，在未对闯红灯行人试行经济处罚前，是否有 99.9% 的把握认为闯红灯与年龄有关？

(2) 当处罚金额为 10 元时，行人闯红灯的概率比不进行处罚降低多少？

(3) 结合调查结果，谈谈如何治理行人闯红灯现象。

18. (12 分) 在  $\triangle ABC$  中， $a, b, c$  分别为内角  $A, B, C$  的对边，

$$c \sin \frac{A+C}{2} = b \sin C.$$

(1) 求角  $B$  的大小；

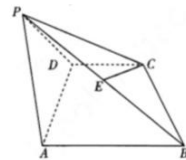
(2) 若  $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C} = \frac{2}{\tan B}$ ， $b = \sqrt{21}$ ，求  $\triangle ABC$  的面积。

19. (12 分) 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是梯形， $AB \parallel CD$ ，

$AB \perp AD$ ,  $AB = AD = 2CD = 2$ ,  $\triangle APD$  为等边三角形,  $E$  为棱  $PB$  的中点.

(1) 证明:  $CE \parallel$  平面  $PAD$ ;

(2) 当  $PB$  的长为多少时, 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ? 请说明理由, 并求此时点  $E$  与到平面  $PCD$  的距离.



20. (12 分) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 动点  $M$  到点  $D(2,0)$  的距离等于

点  $M$  到直线  $x=1$  距离的  $\sqrt{2}$  倍, 记动点  $M$  的轨迹为曲线  $C$ .

(1) 求曲线  $C$  的方程;

(2) 已知直线  $l: y = \frac{1}{2}x + t (t \geq 2)$  与曲线  $C$  交于  $A, B$  两点, 问曲线  $C$  上是否存在

两点  $P, Q$  满足  $\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$ , 若存在, 请求出两点坐标, 不存在, 请说明理由.

21. (12 分) 已知函数  $f(x) = ax^2 - x + \ln x$ , 记  $y = f(x)$  在  $(x_0, f(x_0))$  处的切线为  $l$

(1) 当  $a > 0$  时, 求  $g(x) = f(x) - (a+1)x$  在  $[1, +\infty)$  上的最小值;

(2) 当  $a < 0$  时, 求证: 函数  $y = f(x)$  的图像 (除切点外) 均在切线  $l$  的下方.

选考题: 请考生在第 22、23 题中任选一作答, 如果多做, 则按所做第一题计分

22. (选修 4-4: 坐标系与参数方程) (10 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 动直线  $l_1: y = \frac{1}{k}x (k \in R, \text{且 } k \neq 0)$  与动直线  $l_2:$

$y = -k(x-4) (k \in R, \text{且 } k \neq 0)$  交点  $P$  的轨迹为曲线  $C_1$ , 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系

(1) 求曲线  $C_1$  的极坐标方程;

(2) 若曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$ , 求曲线  $C_1$  与曲线  $C_2$  的交

点的极坐标.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

(1) 设  $\varepsilon > 0$ ,  $\left|x - a < \frac{\varepsilon}{4}\right|, |y - b| < \frac{\varepsilon}{6}$ . 求证:  $|2x + 3y - 2a - 3b| < \varepsilon$ .

(2) 求函数  $y = 5\sqrt{x-1} + \sqrt{10-2x}$  的最大值.

