

淮南市 2023 届高三第二次模拟考试

数学试题

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分. 考试时间 120 分钟.

第 I 卷

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，有且只有一项符合题目要求.

- 已知全集 $U = \mathbb{R}$ ，集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid y = \sqrt{1+x}\}$ ，则 $C_U A =$ ()
 A. $\{x \mid x < -1\}$ B. $\{x \mid x < 0\}$ C. $\{x \mid x \leq -1\}$ D. $\{x \mid x \geq -1\}$
- 已知复数 z 满足 $(2-i) \cdot z = i^{2023}$ (i 是虚数单位)，则复数 z 在复平面内所对应的点位于 ()
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 四位同学各自在“五一”劳动节五天假期中任选一天参加公益活动，则甲在 5 月 1 日、乙不在 5 月 1 日参加公益活动的概率为 ()
 A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{1}{25}$ D. $\frac{4}{25}$
- 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, $(A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的相邻两个对称中心距离为 $\frac{\pi}{2}$ 且图象经过 $M(\frac{\pi}{6}, A)$ ，若将 $f(x)$ 图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 ()
 A. $[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}]$, $k \in \mathbb{Z}$ B. $[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{5\pi}{6}]$, $k \in \mathbb{Z}$
 C. $[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}]$, $k \in \mathbb{Z}$ D. $[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3}{4}\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, $BC = 4$, $AC = 3$, D 是边 AB 的中点, 点 E 满足

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}, \text{ 则 } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE} = (\quad)$$

- A. $-\frac{5}{8}$ B. -1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{8}$

6. 我国古代数学在宋元时期达到繁荣的顶点, 涌现了一大批卓有成就的数学家, 其中朱世杰与秦九韶、杨辉、李冶被誉为我国“宋元数学四大家”. 朱世杰著有《四元玉鉴》和《算学启蒙》等, 在《算学启蒙》中, 最为引人入胜的问题莫过于堆垛问题, 其中记载有以下问题: “今有三角、四角果子垛各一所, 共积六百八十五个, 只云三角底子一面不及四角底子一面七个, 问二垛底子一面几何?” 其中“积”是和的意思, “三角果子垛”是每层都是正三角形的果子垛, 自上至下依次有 1, 3, 6, 10, 15, ..., 个果子, “四角果子垛”是每层都是正方形的果子垛, 自上至下依次有 1, 4, 9, 16, ..., 个果子, “底子一面”指每垛最底层每条边. 根据题意, 可知该三角、四角果子垛最底层每条边上的果子数是 ()

(参考公式: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

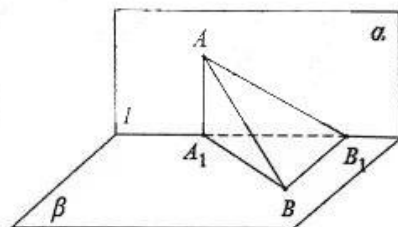
- A. 4,11 B. 5,12 C. 6,13 D. 7,14

7. 如图, $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = l$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, 点 A, B 在棱 l

上的射影分别是 A_1, B_1 , 若 $AA_1 = BB_1 = 2$, $AB = 4$, 则异

面直线 AB_1 与 A_1B 所成角的余弦值为

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$
C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$



第 7 题图

8. 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) + f(x) + 2\cos x = 0$, 当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) > \sin x$, 则不

等式 $f(x) + 2\cos x > f(\pi - x)$ 的解集为

- A. $(\frac{\pi}{2}, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{\pi}{2})$ C. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ D. $(-\infty, \pi)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知单位向量 \vec{a}, \vec{b} ，则下列命题正确的是 ()

A. $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$

B. 若 $\vec{a} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, t\right), \vec{b} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

C. 若 $|\vec{a} - \vec{b}| \geq \sqrt{3}$, 记向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 θ , 则 θ 的最小值为 $\frac{2\pi}{3}$

D. 若 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2\pi}{3}$, 则向量 \vec{b} 在向量 \vec{a} 上的投影向量是 $\frac{1}{2}\vec{a}$

10. 已知圆 M 的方程为: $x^2 + y^2 + ax + ay - 2a - 4 = 0, (a \in R)$, 点 $P(1,1)$, 给出以下结论, 其中正确的有 ()

A. 过点 P 的任意直线与圆 M 都相交

B. 若圆 M 与直线 $x + y + 2 = 0$ 无交点, 则 $a \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

C. 圆 M 面积最小时的圆与圆 $Q: x^2 + y^2 + 6x - 10y + 16 = 0$ 有三条公切线

D. 无论 a 为何值, 圆 M 都有弦长为 $2\sqrt{2}$ 的弦, 且被点 P 平分

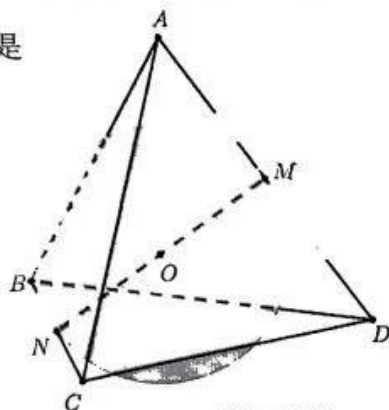
11. 如图, 棱长为 2 的正四面体 $ABCD$ 中, M, N 分别为棱 AD, BC 的中点, O 为线段 MN 的中点, 球 O 的表面正好经过点 M , 则下列结论中正确的是

A. $AO \perp$ 平面 BCD 来源: 高三答案公众号

B. 球 O 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

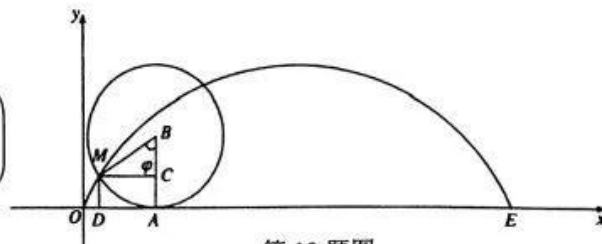
C. 球 O 被平面 BCD 截得的截面面积为 $\frac{4}{3}\pi$

D. 球 O 被正四面体 $ABCD$ 表面截得的截面周长为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$



第 11 题图

12. 当一个圆沿着一条定直线无滑动地滚动时，圆周上一个定点的轨迹称为摆线.如图，圆心为 $B(0,1)$ ，半径为 1 的圆 B ，圆上定点 M 初始位置在原点，当圆 B 沿着 x 轴正向滚动，且半径 BM 旋转角度为 φ ，则以下结论正确的为



第 12 题图

A. 若 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ，则点 M 的坐标为 $\left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right)$

B. 圆 B 滚动一周，得到的摆线长等于圆周长

C. 若圆 B 滚动角度 π 时，点 M 从一个位置 P 到达位置 Q ，则 PQ 长度的最大值为 $\pi + 2$

D. 若定点 M 总在直线 $x - y + a = 0$ 的下方，则 a 的取值范围为 $a > 2 - \frac{\pi}{2}$

三、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知二项式 $\left(1 + x + \frac{a}{x^2}\right)^5$ 的常数项为 -59 ，则 $a =$ _____.

14. 近年来，我国肥胖人群的规模急速增长，肥胖人群有很大的心血管安全隐患.目前，国际上常用身体质量指数 (BMI) 来衡量人体胖瘦程度以及是否健康，其计算公式是

$$BMI = \frac{\text{体重 (单位: 千克)}}{\text{身高}^2 (\text{单位: 米})}$$

我国成人的 BMI 数值标准为： $BMI < 18.5$ 为偏瘦，

$18.5 \leq BMI < 24$ 为正常， $24 \leq BMI < 28$ 为偏胖， $BMI \geq 28$ 为肥胖.为了解某公司员工的身体肥胖情况，研究人员从公司员工体检数据中，利用分层抽样得到 15 名员工的 BMI 数据如下：23.5, 21.6, 30.6, 22.1, 23.7, 20.6, 25.5, 23.9, 20.8, 21.5, 21.8, 18.2, 25.2, 21.5, 19.1. 则该组数据的第 70 百分位数为_____.

15. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{3S_n}{n} + n = 3a_n + 1, a_1 = -\frac{1}{3}$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是_____.

16. 双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{t} = 1 (t > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$ ， A, B 分别是 C 的左、右顶点， P 是 C 上异于 A, B 的一动点，直线 PA, PB 分别与 y 轴交于点 M, N ，请写出所有满足条件 $\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN} = 0$ 的定点 Q 的坐标_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 2^n, n \in \mathbb{N}^*$ 且 $a_1 = 1$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = \frac{a_n + 1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分) 已知 $f(x) = 2 \cos x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6}), x \in \mathbb{R}$, $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $f(x)$ 的最大值为 $f(A)$.

(I) 求 A ;

(II) 当 $a = 2, b = 2\sqrt{3}$ 时, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

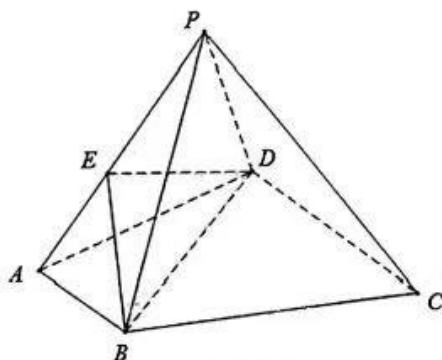
19. 2022 年 10 月 16 日至 10 月 22 日, 中国共产党第二十次全国代表大会在北京召开, 此次大会是在全党全国各族人民迈上全面建设社会主义现代化国家新征程、向第二个百年奋斗目标进军的关键时刻召开的一次十分重要的大会。在树人中学团委的组织下, 高二年级各班团支部举行了“学习二十大, 做有为青年”的知识竞赛活动, 经过激烈竞争, 高二(1)班(以下简称一班)和高二(3)班(以下简称三班)进入了最后的年级决赛, 决赛规定: 共进行 5 轮比赛, 每轮比赛每个班可以从 A, B 两个题库中任选 1 题作答, 在前两轮比赛中每个班的题目必须来自同一题库, 后三轮比赛中每个班的题目必须来自同一题库, A 题库每题 20 分, B 题库每题 30 分, 一班能正确回答 A、B 题库每题的概率分别为 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{1}{2}$, 三班能正确回答 A、B 题库每题的概率均为 $\frac{2}{3}$, 且每轮答题结果互不影响。

(I) 若一班前两轮选 A 题库, 后三轮选 B 题库, 求其总分不少于 100 分的概率;

(II) 若一班和三班在前两轮比赛中均选了 B 题库, 而且一班两轮得分 60 分, 三班两轮得分 30 分, 一班后三轮换成 A 题库, 三班后三轮不更换题库, 设一班最后的总分为 X , 求 X 的分布列, 并从每班总分的均值来判断, 哪个班赢下这场比赛?

20. (本题满分 12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是梯形, $AB \parallel CD$, $BD = DC = 2AB = 2$, $BD \perp CD$, $\triangle PBD$ 是等边三角形且与底面垂直, E 是棱 PA 上一点, $\overline{AE} = \lambda \overline{EP}$.

- (I) 当 $PC \parallel$ 平面 EBD , 求实数 λ 的值;
 (II) 当 λ 为何值时, 平面 EBD 与平面 PBD 所成的锐二面角的大小为 $\frac{\pi}{6}$?



第 20 题图

21. 已知点 $F(1, 0)$, 圆 $C: (x+1)^2 + y^2 = 9$, 过点 F 的直线 l 交圆 C 于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$.

- (I) 求动点 $P(2x_0, \sqrt{3}y_0)$ 的轨迹 Γ 方程;
 (II) 设轨迹 Γ 与 x 轴交于 D, E 两点 (点 D 在点 E 的右侧), 过点 D 作 x 轴的垂线 m , 过点 F 作直线 DP 的垂线 n , 垂线 m 与 n 交于点 Q , 求证: 点 P, Q, E 共线.

22. 已知函数 $f(x) = xe^{\frac{a}{x}} + \ln x + \frac{a}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
 (II) 若方程 $f(x) = e + 1$ 恰有两个根, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw