2024届高三一轮复习联考(一)全国卷
理科数学试题

注意事项：

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟,满分150分

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.已知复数 $z=i^2+i^3+i^4$,其中 i 为虚数单位,则 $\bar{z}=$

A.$2+i$　　B.i　　C.$-i$　　D.$1-2i$

2.若集合 $A=\{x|\ln(x+1)<1\}$,$B=\{y|y=\sqrt{x}+1\}$,则 $A\cup B=$

A.$(-1,+\infty)$　　B.$[1,e-1)$　　C.$\mathbf{R}$　　D.$(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

3.在平面直角坐标系 xOy 中,若角 θ 以原点为顶点,以 x 轴非负半轴为始边,且终边过点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$,则曲线 $y=\sin(x+\theta)$ 的对称轴可能是

A.$x=\frac{2\pi}{3}$　　B.$x=-\frac{\pi}{3}$　　C.$x=\frac{5\pi}{6}$　　D.$x=\frac{\pi}{3}$

4.曲线 $y=x\cdot\cos x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 处的切线方程为

A.$x-y-\frac{\pi}{2}=0$　　B.$x+y-\frac{\pi}{2}=0$　　C.$x+\frac{2}{\pi}y-\frac{\pi}{2}=0$　　D.$x+\frac{\pi}{2}y-\frac{\pi}{2}=0$

5.已知实数 x,y 满足 $9x^2+10xy-190=0$,$x>0$,则 $x+\frac{1}{x}+y$ 的最小值为

A.0　　B.$2\sqrt{2}$

C.$\frac{3\sqrt{190}}{5}+2$　　D.3

6.已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$,$\sin2\alpha-\cos^2 2\beta=0$,则 $\tan\beta=$

A.$\frac{1}{2}$或2　　B.3　　C.$\frac{1}{3}$或3　　D.$\frac{1}{3}$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17.（12 分）已知关于 x 的不等式 $4^x+4^{-x}\leqslant 2^x+2^{-x}+\frac{7}{4}$ 的解集为 M.

（1）求集合 M；

（2）若 $m,n\in M$，且 $m>0,n>0,m+2n=1$，求 $\frac{1}{4m}+\frac{1}{n}$ 的最小值.

18.（12 分）已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+bx+1$.

（1）当 $b=0,a=0$ 时，求 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上的最大值；

（2）当 $b=\frac{a^2}{4}$，且 $a\in(-4,0]$ 时，讨论 $f(x)$ 的零点个数.

19.（12 分）已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}\cos^2\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)-4\sin\omega x\cos\omega x\ (x\in\mathbf{R},\omega>0)$ 的两个相邻的对称中心的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

（1）求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间；

（2）当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有两个不相等的实数根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，求 $\cos\frac{x_1+3x_2}{2}$ 的取值范围.

20.（12 分）筒车（chinese noria）亦称“水转筒车”。一种以水流作动力，取水灌田的工具。据史料记载，筒车发明于隋而盛于唐，距今已有 1 000 多年的历史.这种靠水力自动的古老筒车，在家乡郁郁葱葱的山间、溪流间构成了一幅幅远古的田园春色图.水转筒车是利用水力转动的筒车，必须架设在水流湍急的岸边.水激轮转，浸在水中的小筒装满了水带到高处，筒口向下，水即自筒中倾泻入轮旁的水槽而汇流入田.某乡间有一筒车，其最高点到水面的距离为 6 m，筒车直径为 8 m，设置有 8 个盛水筒，均匀分布在筒车转轮上，筒车上的每一个盛水筒都做逆时针匀速圆周运动，筒车转一周需要 24 s，如图，盛水筒 A（视为质点）的初始位置 P_0 距水面的距离为 4 m.

（1）盛水筒 A 经过 t s 后距离水面的高度为 h（单位：m），求筒车转动一周的过程中，h 关于 t 的函数 $h=f(t)$ 的解析式；

7.若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-6\leqslant 0,\\ x-2y-1\leqslant 0,\\ 2x-y-2\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-3y$ 的最小值为

A.-4　　B.-9　　C.-3　　D.1

8.已知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$y=f(2x-1)$ 为奇函数，$y=f(x+1)$ 为偶函数，若当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=e^x$，则 $f(194)=$

A.$\frac{1}{e}$　　B.0　　C.1　　D.e

9.若 $f(x)=\frac{a}{e^x+1}-1$ 为奇函数，则 $g(x)=\ln[(x-1)(x-a)]$ 的单调递增区间是

A.$(0,1)$　　B.$(1,+\infty)$　　C.$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$　　D.$(2,+\infty)$

10.若 $x>1,y>1$，则"$x-y>1$"是"$\ln x-\ln y>1$"的

A.充要条件　　B.充分不必要条件

C.必要不充分条件　　D.既不充分也不必要条件

11.设 $a=\log_3 4$，$b=\log_{0.8}0.7$，$c=1.02^{51}$，则 a,b,c 的大小关系为

A.$a<c<b$　　B.$a<b<c$　　C.$b<a<c$　　D.$c<a<b$

12.已知函数 $f(x)=\frac{x}{e^x}+a(x-1)^2$ 有极值点，且极大值不超过 $\frac{1}{2}$，则 a 的取值范围是

A.$(-\infty,0]$　　B.$\left(-\infty,\frac{1}{2e}\right)$

C.$\left(-\infty,\frac{1}{2e}\right)\cup\left(\frac{1}{2e},\frac{1}{2}\right]$　　D.$(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.命题"$\forall x\in\mathbf{R},\sin 2x+\sin x\geqslant -2$"的否定为________.

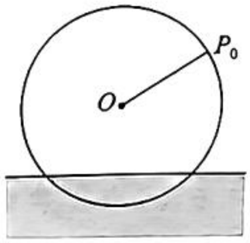
14.已知正数 a,b 满足 $a\geqslant\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$，$b\geqslant\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$，则 a^2+b^2 的最小值为________.

15.已知函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期为 4π，将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\varphi\ (\varphi>0)$ 个单位长度后得到 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，则 φ 的最小值为________.

16.已知函数 $f(x)=e^{x+1}-a\ln x$，若 $f(x)\geqslant a(\ln a-1)$ 对 $x>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

(2)盛水筒 B(视为质点)与盛水筒 A 相邻,设盛水筒 B 在盛水筒 A 的顺时针方向相邻处,求盛水筒 B 与盛水筒 A 的高度差的最大值(结果用含 π 的代数式表示),及此时对应的 t.

(参考公式:$\sin\theta-\sin\varphi=2\cos\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sin\dfrac{\theta-\varphi}{2}$,$\cos\theta-\cos\varphi=2\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sin\dfrac{\varphi-\theta}{2}$)



21.(12 分)已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-ax+2$.

(1)当 $a>0$ 时,求 $f(x)$ 的单调区间;

(2)当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)+2x+x\ln(x+1)\geqslant0$ 恒成立,求整数 a 的最大值.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\y=-2+t\sin\alpha,\end{cases}$ $\left(t\text{ 为参数},\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\right)$,点 $P(0,-2)$,以坐标原点 O 为极点,x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$,曲线 C_2 与极轴交于点 A,与曲线 C_1 交于点 B.

(1)若 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$,试写出曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2)若 $\angle APB=\dfrac{\pi}{6}$,求 $\triangle APB$ 的面积.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x-2a|+|x+a+1|$

(1)当 $a=-1$ 时,求不等式 $f(x)\leqslant2x+3$ 的解集;

(2)若对任意 $x\in\mathbf{R}$,$f(x)\geqslant|2a-1|$ 恒成立,求 a 的取值范围.

官方微信公众号:zizzsw 咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com 微信客服:zizzs2018

2024 届高三一轮复习联考(一)　全国卷

理科数学参考答案及评分意见

1.B 【解析】由 $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$，得 $z=i^2+i^3+i^4=-1-i+1=-i$，所以 $\overline{z}=i$.故选 B.

2.A 【解析】由题意知 $A=\{x\mid \ln(x+1)<1\}=(-1,e-1)$，$B=\{y\mid y=\sqrt{x}+1\}=[1,+\infty)$，所以 $A\cup B=(-1,+\infty)$.故选 A.

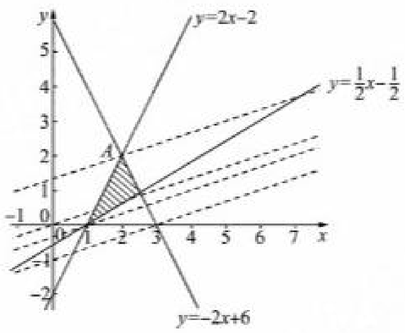
3.D 【解析】∵角 θ 的终边经过点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，∴$\sin\theta=\frac{1}{2}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$\theta=\frac{\pi}{6}+2n\pi, n\in\mathbf{Z}$，$x+\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，所以 $y=\sin(x+\theta)$ 的对称轴为 $x=\frac{\pi}{3}+k\pi-2n\pi, k\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{Z}$.故选 D.

4.C 【解析】设 $f(x)=x\cdot\cos x$，则 $f'(x)=\cos x-x\sin x$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$，所以曲线 $y=x\cdot\cos x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 处的切线方程为 $y=-\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，即 $y=-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{4}$，即 $x+\frac{2}{\pi}y-\frac{\pi}{2}=0$.故选 C.

5.B 【解析】由 $9x^2+10xy-190=0$，解得 $y=\frac{190-9x^2}{10x}$，又因为 $x>0$，所以 $x+\frac{1}{x}+y=\frac{20}{x}+\frac{x}{10}\geqslant 2\sqrt{2}$，当且仅当 $x=10\sqrt{2}$ 时等号成立.故选 B.

6.D 【解析】$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，两边平方得 $1+\sin 2\alpha=\frac{9}{5}$，所以 $\cos 2\beta=\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$，故 $\cos^2\beta-\sin^2\beta=\frac{4}{5}$，因为 $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$，所以 $\cos^2\beta=\frac{9}{10}$，$\sin^2\beta=\frac{1}{10}$，$\tan^2\beta=\frac{1}{9}$，又因为 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\tan\beta=\frac{1}{3}$.故选 D.

7.A 【解析】根据不等式组得到的可行域如下图阴影部分所示，作出直线 $x-3y=0$ 并平移，由图可知，当平移后的直线经过点 A 时，z 取最小值，根据 $\begin{cases}2x+y-6=0,\\2x-y-2=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$ 所以 $z_{\min}=2-3\times 2=-4$.故选 A.



8.C 【解析】$y=f(2x-1)$ 为奇函数，即 $f(2x-1)+f(-2x-1)=0$，所以 $f(x)$ 关于 $(-1,0)$ 中心对称；$y=f(x+1)$ 为偶函数，即 $f(x+1)=f(-x+1)$，所以 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x)=f(-x+2)=-f(x-4)$，故 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$，即 $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数，所以 $f(194)=f(8\times 24+2)=f(2)=f(0)=1$.故选 C.

9.D 【解析】由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)+f(x)=\frac{a}{e^{-x}+1}-1+\frac{a}{e^x+1}-1=a-2=0$，∴$a=2$，$g(x)=\ln[(x-1)(x-2)]$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$，当 $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ 时，$y=(x-1)(x-2)$ 的单调递增区间为 $(2,+\infty)$，∴$g(x)=\ln[(x-1)(x-a)]$ 的单调递增区间为 $(2,+\infty)$.故选 D.

10.C 【解析】充分性：取 $x=4,y=2$，则 $x-y=2>1$，$\ln x-\ln y=\ln 4-\ln 2=\ln 2<1$，所以“$x-y>1$”不是“$\ln x-\ln y>1$”的充分条件；必要性：当 $\ln x-\ln y>1$ 时，$\ln x>\ln y+1$，所以 $x>ey>2y>y+1$，即 $x>y+1$，所以“$x-y>1$”是“$\ln x-\ln y>1$”的必要条件，综上，“$x-y>1$”是“$\ln x-\ln y>1$”的必要不充分条件.故选 C.

11.B 【解析】$3<4<3\sqrt{3}$，所以 $a=\log_3 4\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$；因为 $(0.8)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{5\sqrt{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{64}{5}}>\frac{1}{5}\sqrt{\frac{49}{4}}=0.7$，$0.7>0.64=(0.8)^2$，即 $(0.8)^{\frac{3}{2}}>0.7>(0.8)^2$，所以 $b=\log_{0.8}0.7\in\left(\frac{3}{2},2\right)$；设 $f(x)=x-1-\ln x$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，所以当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(1,+\infty)$单调递增；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,1)$单调递减，所以 $f(x)\geqslant f(1)=0$，即 $x-1\geqslant\ln x$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，同理 $f\left(\frac{1}{x}\right)\geqslant 0$，即$\frac{1}{x}-1\geqslant-\ln x$，所以 $\ln x\geqslant 1-\frac{1}{x}$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，故 $\ln 1.02>1-\frac{1}{1.02}=\frac{1}{51}$，所以 $\ln 1.02^{51}>1$，从而 $c=1.02^{51}>e$，综上，$1<a<\frac{3}{2}<b<2<e<c$.故选 B.

12.C 【解析】$f(x)=\frac{x}{e^x}+a(x-1)^2$，$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}+2a(x-1)=\frac{(x-1)(2ae^x-1)}{e^x}$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$2ae^x-1<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增；在$(1,+\infty)$上单调递减，所以 $f(x)$的极大值为 $f(1)=\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$，符合题意.

②当 $a=\frac{1}{2e}$时，$f'(x)=\frac{(x-1)(e^{x-1}-1)}{e^x}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递增，此时，$f(x)$无极值点.

③当 $a>\frac{1}{2e}$时，令 $f'(x)=\frac{(x-1)(2ae^x-1)}{e^x}=0$，解得 $x_1=1$ 或 $x_2=-\ln(2a)$，且满足$-\ln(2a)<1$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当$-\ln(2a)<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x<-\ln(2a)$时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$在$(-\infty,-\ln(2a))$上单调递增，在$(-\ln(2a),1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以 $f(x)$的极大值 $f(-\ln(2a))=\frac{-\ln(2a)}{e^{-\ln(2a)}}+a[-\ln(2a)-1)]^2=a[1+\ln(2a)]^2$，令 $t=\ln(2a)>-1$，则 $f(-\ln(2a))=\frac{1}{2}e^t(1+t^2)$，设 $g(t)=\frac{1}{2}e^t(1+t^2)$，则 $g'(t)=\frac{1}{2}e^t(1+t)^2>0$，所以 $g(t)$在$(-1,+\infty)$上单调递增，由题意知 $f_{极大}(x)=f(-\ln(2a))=\frac{1}{2}e^t(1+t^2)\leqslant\frac{1}{2}$，即 $g(t)\leqslant\frac{1}{2}=g(0)$，所以 $t\leqslant 0$，即 $a\leqslant\frac{1}{2}$，故$\frac{1}{2e}<a\leqslant\frac{1}{2}$.

④当 $0<a<\frac{1}{2e}$时，$f'(x)=\frac{(x-1)(2ae^x-1)}{e^x}=0$，解得 $x_1=1$ 或 $x_2=-\ln(2a)$，且满足$-\ln(2a)>1$，当 $x>-\ln(2a)$时，$f'(x)>0$；当 $1<x<-\ln(2a)$时，$f'(x)<0$，当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,-\ln(2a))$上单调递减，在$(-\ln(2a),+\infty)$上单调递增，所以 $f(x)$的极大值为 $f(1)=\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$，符合题意，综上，$a\in\left(-\infty,\frac{1}{2e}\right)\cup\left(\frac{1}{2e},\frac{1}{2}\right]$.故选 C.

13.$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\sin 2x_0+\sin x_0<-2$ 【解析】命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin 2x+\sin x\geqslant-2$”的否定为“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\sin 2x_0+\sin x_0<-2$”.

14.6 【解析】$a\geqslant\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$，$b\geqslant\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$，所以 $a+b\geqslant\frac{3}{a}+\frac{3}{b}$，即 $a+b\geqslant 3\cdot\frac{a+b}{ab}$，因为 $a+b>0$，所以 $ab\geqslant 3$，故 a^2+

$b^2\geqslant 2ab\geqslant 6$，当且仅当 $a=b=\sqrt{3}$ 时等号成立.

15.$\pi+1$ 【解析】函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期为 4π，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=4\pi$，解得 $\omega=\frac{1}{2}$，$f(x)=\sin\frac{x}{2}$ 向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后得到 $g(x)=\sin\frac{x-\varphi}{2}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$\frac{x-\varphi}{2}\in\left(-\frac{\varphi}{2},\frac{1-\varphi}{2}\right)$，又因为 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $\begin{cases}-\frac{\varphi}{2}\geqslant-\frac{3}{2}\pi+2k\pi,\\ \frac{1-\varphi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}$ $(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\pi+1-4k\pi\leqslant\varphi\leqslant 3\pi-4k\pi$，$\because\varphi>0,k\in\mathbf{Z}$，$\therefore\varphi$ 的最小值为 $\pi+1$.

16.$(0,e^2]$ 【解析】易知 $a>0$，由 $e^{x+1}-a\ln x\geqslant a(\ln a-1)$ 可得 $\frac{e^{x+1}}{a}+1-\ln a\geqslant\ln x$，即 $e^{x+1-\ln a}+1-\ln a\geqslant\ln x$，则有 $e^{x+1-\ln a}+x+1-\ln a\geqslant x+\ln x$，设 $h(x)=e^x+x$，易知 $h(x)$ 单调递增，$h(x+1-\ln a)\geqslant h(\ln x)$，所以 $x+1-\ln a\geqslant\ln x$，即 $x-\ln x\geqslant\ln a-1$，设 $g(x)=x-\ln x$，易知 $g(x)\geqslant g(1)=1$，则有 $1\geqslant\ln a-1$，解得 $a\in(0,e^2]$.

17.解：(1) $4^x+4^{-x}\leqslant 2^x+2^{-x}+\frac{7}{4}$，$\therefore(2^x+2^{-x})^2-2\leqslant 2^x+2^{-x}+\frac{7}{4}$，即 $(2^x+2^{-x})^2-(2^x+2^{-x})-\frac{15}{4}\leqslant 0$，…… 2 分

$\left(2^x+2^{-x}-\frac{5}{2}\right)\left(2^x+2^{-x}+\frac{3}{2}\right)\leqslant 0$，解得 $-\frac{3}{2}\leqslant 2^x+2^{-x}\leqslant\frac{5}{2}$，…………………… 4 分

因为 $2^x+2^{-x}\geqslant 2$，所以 $2\leqslant 2^x+2^{-x}\leqslant\frac{5}{2}$，解得 $\frac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 2$，所以 $-1\leqslant x\leqslant 1$，故 $M=[-1,1]$. ………… 6 分

(2) $m,n\in M$，且 $m>0,n>0$，则 $m,n\in(0,1]$，

$\frac{1}{4m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{4m}+\frac{1}{n}\right)(m+2n)=\frac{9}{4}+\frac{m}{n}+\frac{n}{2m}\geqslant\frac{9}{4}+\sqrt{2}$，…………………… 9 分

当且仅当 $n=\sqrt{2}m$，即 $m=\frac{2\sqrt{2}-1}{7}$，$n=\frac{4-\sqrt{2}}{7}$ 时等号成立，…………………… 11 分

综上，$\frac{1}{4m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 $\frac{9}{4}+\sqrt{2}$. …………………… 12 分

18.解：(1) 当 $b=0,a=0$ 时，$f(x)=x^3+1$，$f'(x)=3x^2\geqslant 0$，…………………… 1 分

则 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上的最大值为 $f(3)=28$. …………………… 3 分

(2) 当 $b=\frac{a^2}{4}$ 时，$f(x)=x^3-ax^2+\frac{a^2}{4}x+1$，$f'(x)=3x^2-2ax+\frac{a^2}{4}=3\left(x-\frac{a}{6}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)$. ………… 4 分

①当 $a=0$ 时，$f(x)=x^3+1=0$，解得 $x=-1$，此时 $f(x)$ 有 1 个零点；…………………… 5 分

②当 $a<0$ 时，$\frac{a}{6}>\frac{a}{2}$，所以当 $x<\frac{a}{2}$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)$ 上单调递增，

当 $\frac{a}{2}<x<\frac{a}{6}$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{6}\right)$ 上单调递减，当 $x>\frac{a}{6}$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{a}{6},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $f_{极小}(x)=f\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{a^3}{54}+1$，$f_{极大}(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)=1$. …………………… 6 分

(i) 当 $a=-3\sqrt[3]{2}$，即 $a^3=-54$ 时，$f_{极小}(x)=f\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{a^3}{54}+1=0$，$f_{极大}(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)=1>0$，$f(a)=\frac{a^3}{4}+1=\frac{1}{4}\times(-54)+1<0$，此时 $f(x)$ 有两个零点，$x_1=\frac{a}{6}$，$x_2\in\left(a,\frac{a}{2}\right)$；…………………… 7 分

(ⅱ)当$-4<a<-3\sqrt[3]{2}$,即$-64<a^3<-54$时,$f_{极小}(x)=f\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{a^3}{54}+1<0$,$f_{极大}(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)=1>0$,即$f\left(\frac{a}{2}\right)f\left(\frac{a}{6}\right)<0$,所以$f(x)$在$\left(\frac{a}{2},\frac{a}{6}\right)$有一个零点,因为$f(a)=\frac{a^3}{4}+1<-\frac{25}{2}<0$,$f\left(\frac{a}{2}\right)>0$,所以$f(x)$在$\left(a,\frac{a}{2}\right)$有一个零点,因为$f(-a)=-\frac{9}{4}a^3+1>-\frac{9}{4}\times(-54)+1>0$,$f\left(\frac{a}{6}\right)<0$,所以$f(x)$在$\left(\frac{a}{6},-a\right)$有一个零点,所以当$-4<a<-3\sqrt[3]{2}$时,$f(x)$有三个零点; ………… 9分

(ⅲ)当$-3\sqrt[3]{2}<a<0$,即$-54<a^3<0$时,$f_{极小}(x)=f\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{a^3}{54}+1>0$,$f_{极大}(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)=1>0$,

$\therefore f(x)$在$\left(\frac{a}{2},\frac{a}{6}\right)$,$\left(\frac{a}{6},+\infty\right)$均没有零点,$\because f(a-1)=\frac{1}{4}a^3-\frac{5}{4}a^2+2a<0$,即$f\left(\frac{a}{2}\right)f(a-1)<0$,

所以$f(x)$在$\left(a-1,\frac{a}{2}\right)$上有一个零点,此时$f(x)$有一个零点. ………… 11分

综上,当$-3\sqrt[3]{2}<a\leqslant0$时,$f(x)$有一个零点;当$-4<a<-3\sqrt[3]{2}$时,$f(x)$有三个零点;当$a=-3\sqrt[3]{2}$时,$f(x)$有两个零点. ………… 12分

19.解:(1)$f(x)=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}\cos^2\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)-4\sin\omega x\cos\omega x=-2\sqrt{3}\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)-2\sin 2\omega x=-\sqrt{3}\cos 2\omega x+\sin 2\omega x=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$. ………… 2分

由题意知,$f(x)$的最小正周期为π,所以$T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$,解得$\omega=1$. ………… 3分

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得$-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$, …… 4分

取$k=1$,则$\frac{11\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{17\pi}{12}$,取$k=0$,则$-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}$,所以$f(x)$在$[0,\pi]$上的单调递增区间为$\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$,$\left[\frac{11\pi}{12},\pi\right]$.

………… 6分

(2)由(1)知$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得$x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$, ………… 8分

所以$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象的一条对称轴为直线$x=\frac{5\pi}{12}$,$\therefore x_1+x_2=\frac{5\pi}{6}$,且$\frac{5\pi}{12}<x_2\leqslant\frac{\pi}{2}$,

所以$\frac{5\pi}{6}<x_2+\frac{5\pi}{12}\leqslant\frac{11\pi}{12}$, ………… 10分

$\therefore\cos\frac{x_1+3x_2}{2}=\cos\left(x_2+\frac{5\pi}{12}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ………… 12分

20.解:以筒车转轮的中心O为原点,与水面平行的直线为x轴建立平面直角坐标系,

(1)设$h=M\sin(\omega t+\varphi)+N$,$t\in[0,24]$,由题意知,$2M=8$,$M+N=6$,

$\therefore M=4,N=2$,即$h=4\sin(\omega t+\varphi)+2$, ………… 2分

当$t=0$时,$h=4\sin\varphi+2=4$,解得$\sin\varphi=\frac{1}{2}$,

结合图像可知$\varphi=\frac{\pi}{6}$, ………… 3分

又因为$T=\frac{2\pi}{\omega}=24$,所以$\omega=\frac{\pi}{12}$, ………… 4分

$h(3)=1-\ln 4<0, h(4)=2-\ln 5>0$，所以存在 $x_0\in(3,4)$ 使得 $h(x_0)=0$，即 $x_0-2=\ln(x_0+1)$. …… 10 分

则有 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增，$g(x)\geqslant g(x_0)$，

所以 $a\leqslant g(x_0)=\dfrac{(x_0+1)[\ln(x_0+1)+2]}{x_0}=\dfrac{(x_0+1)[(x_0-2)+2]}{x_0}=x_0+1$，

因为 $x_0\in(3,4)$，所以 $x_0+1\in(4,5)$，所以整数 a 的最大值为 4. …… 12 分

22.**解**：(1)由 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 知，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=-2+\dfrac{1}{2}t,\end{cases}$ 可得曲线 C_1 的普通方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-2$. …… 2 分

由曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，化简得 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=2$，由 $x=\rho\sin\theta, y=\rho\cos\theta$ 知，曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x+y=2$. …… 4 分

(2)将 $\theta=0$ 代入 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，得 $\rho=2$，所以点 A 的直角坐标为 $(2,0)$. …… 5 分

故直线 AP 是倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的直线，且 $|PA|=2\sqrt{2}$，

因为点 B 是曲线 C_1 与曲线 C_2 的交点，且满足 $\angle APB=\dfrac{\pi}{6}$，则直线 C_1 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{12}$ 或 $\dfrac{5\pi}{12}$. …… 7 分

将 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=-2+t\sin\alpha,\end{cases}$ 代入曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x+y=2$，得 $t=\dfrac{4}{\cos\alpha+\sin\alpha}$，

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{12}$ 时，$t=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$； …… 8 分

当 $\alpha=\dfrac{5\pi}{12}$ 时，$t=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，所以 $|PB|=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$， …… 9 分

从而 $S_{\triangle APB}=\dfrac{1}{2}|PA||PB|\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. …… 10 分

23.**解**：(1)当 $a=-1$ 时，$f(x)=|x+2|+|x|$， …… 1 分

当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=2x+2\leqslant2x+3$，即 $2\leqslant3$，恒成立，所以 $x\geqslant0$； …… 2 分

当 $-2\leqslant x<0$ 时，$f(x)=x+2-x=2\leqslant2x+3$，解得 $x\geqslant-\dfrac{1}{2}$，所以 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x<0$； …… 3 分

当 $x<-2$ 时，$f(x)=-2x-2\leqslant2x+3$，解得 $x\geqslant-\dfrac{5}{4}$，所以无解， …… 4 分

综上，不等式 $f(x)\leqslant2x+3$ 的解集为 $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. …… 5 分

(2) $f(x)=|x-2a|+|x+a+1|\geqslant|(x-2a)-(x+a+1)|=|3a+1|$， …… 6 分

当且仅当 $(x-2a)(x+a+1)\leqslant0$ 时等号成立， …… 7 分

由题意得 $|3a+1|\geqslant|2a-1|$，两边平方化简得 $a^2+2a\geqslant0$，解得 $a\leqslant-2$ 或 $a\geqslant0$， …… 9 分

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$. …… 10 分

官方微信公众号：zizzsw
咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com
微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。