高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内，复数 z 所对应点的坐标为 $(1,-1)$，则 $\frac{5}{z^2+1}=$

A. $1+2i$　　B. $1-2i$　　C. $-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}i$　　D. $\frac{5}{4}-\frac{5}{4}i$

2. 已知集合 $S=\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，$T=\left\{y\middle|y=\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则 $S\cap T=$

A. $\varnothing$　　B. S　　C. T　　D. $\mathbf{Z}$

3. 已知命题 p：$y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ 的最小正周期为 4π；命题 q：$\exists x\in\mathbf{R}$，$\cos x=\frac{\pi}{3}$，则下列命题中为真命题的是

A. $p\wedge q$　　B. $\neg p\vee q$

C. $p\wedge\neg q$　　D. $\neg(p\vee q)$

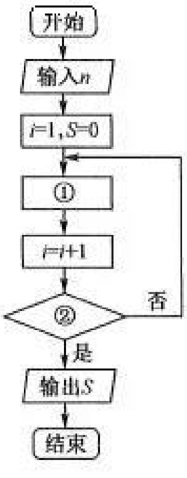
4. 某同学为了求 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$，设计了如图所示的程序框图，在该程序框图中，①和②两处应分别填入

A. $S=S+i^2$，$i\geqslant n$

B. $S=S+(i-1)^2$，$i\geqslant n+1$

C. $S=S+i^2$，$i>n$

D. $S=S+(i+1)^2$，$i\geqslant n-1$



5. 若 $(1+2x)(1-x+x^2)^9=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{19}x^{19}$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{18}$ 的值是

A. 0　　B. 1

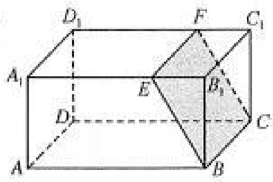
C. 2　　D. 3

6. 已知 $f(x)=\frac{a^x}{1+a^x}(a>0$，且 $a\neq1)$，则下列函数为奇函数的是

A. $f(x-1)+\frac{1}{2}$　　B. $f(x+1)-\frac{1}{2}$

C. $f(x)+\frac{1}{2}$　　D. $f(x)-\frac{1}{2}$

7. 如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被平面 $BCFE$ 截成两个几何体，其中 E,F 分别在 A_1B_1 和 D_1C_1 上，且 $EF/\!/B_1C_1$，则以下结论错误的是



A. $EF/\!/BC$
B. $AD/\!/$平面 $BCFE$
C. 几何体 BB_1E-CC_1F 为棱柱
D. 几何体 AA_1EB-DD_1FC 为棱台

8. 已知点 F 为双曲线 $C:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的下焦点，M 为其上顶点，过 F 作垂直于 C 的实轴的直线交 C 于 A,B 两点，若△ABM 为锐角三角形，则 C 离心率的取值范围为

A. $(1,\sqrt{5})$　　B. $(1,2)$　　C. $(2,\sqrt{5})$　　D. $(\sqrt{3},2)$

9. 在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\sqrt{3}b\sin C+c\cos B=a$，则角 C 的大小为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

10. 已知实数 x,y 满足 $3^x=4,4^y=9$，则以下结论错误的是

A. $x^2y^2=3^x$　　B. $x<y$　　C. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\sqrt{2}$　　D. $x+y>2xy$

11. 某企业的商标图案是曲线 $C_1:x^2+y^2-2|x|-2|y|=0$ 所围成的图形，设 $C_2:|x|+|y|=2$，则在曲线 C_1 内任取一点，则该点取自曲线 C_2 内的概率为

A. $\frac{2}{\pi}$　　B. $\frac{2}{\pi+2}$　　C. $\frac{2}{\pi+1}$　　D. $\frac{4}{\pi+4}$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-xe^x, & x\geq 0,\\ \frac{x}{e^x}, & x<0,\end{cases}$ 则不等式 $f(x-1)>f(\ln x)$ 的解为

A. $(0,1)$　　B. $(1,e)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(e,+\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

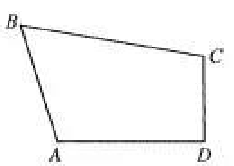
13. 为研究我国人口增长情况，某同学统计了自 1960 年起到 2019 年 60 年中每十年人口净增长数量情况如下表：

第 x 个十年	1	2	3	4	5	6
净增人口 y(亿)	1.55	1.53	1.52	1.36	0.76	0.66

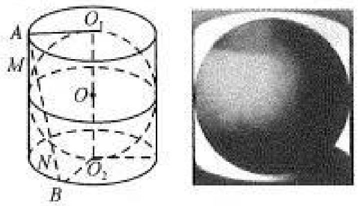
若该同学发现 x 与 y 间的回归方程为 $\hat{y}=-0.1977x+\hat{a}$，则 $\hat{a}\approx$________.（结果精确到 0.001）

14. 已知点 F 为抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点，点 M 为 C 上一点，点 N 为 C 的准线上一点，若△MNF 为等边三角形，则△MNF 的面积为________.

15. 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AD\perp CD$，$AD=\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}=$________.



第 15 题



第 16 题

16. 传说古希腊数学家阿基米德的墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等. 由于这个“圆柱容球”是阿基米德生前最引以为豪的发现，于是他留下遗言：他死后，墓碑上要刻上一个“圆柱容球”的几何图形. 如图，在底面半径为 1 的圆柱 O_1O_2 内的球 O 与圆柱 O_1O_2 的上、下底面及母线均相切，设 A,B 分别为圆柱 O_1O_2 的上、下底面圆周上一点，且 O_1A 与 O_2B 所成的角为 90°，则 AB 与圆柱 O_1O_2 的底面所成角的正切值为________；直线 AB 与球 O 的球面交于两点 M,N，则 MN 的值为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

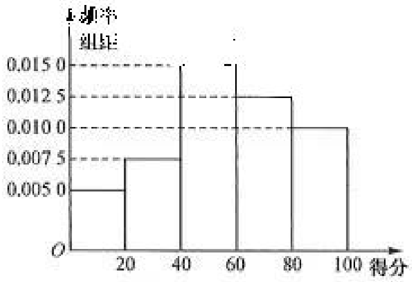
设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_6=63$，$a_4=8a_1$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=2\log_2 a_n+1$，是否存在正整数 k，使得 $b_7+b_8+b_9+\cdots+b_{k+7}=133$？若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由.

18.（本小题满分 12 分）

为缓解城市垃圾带来的问题，许多城市实行了生活垃圾强制分类．为了加强学生对垃圾分类意义的认识以及养成良好的垃圾分类的习惯，某学校团委组织了垃圾分类知识竞赛活动．设置了四个箱子，分别标有"厨余垃圾""有害垃圾""可回收物""其他垃圾"；另有写有垃圾名称的卡片若干张．每位参赛选手从所有写有垃圾名称的卡片中随机抽取 20 张，按照自己的判断，将每张卡片放入对应的箱子中．规定每正确投放一张卡片得 5 分，投放错误得 0 分．比如将写有"废电池"的卡片放入写有"有害垃圾"的箱子得 5 分，放入其他箱子得 0 分．从所有参赛选手中随机抽取 40 人，将他们的得分分成以下 5 组：$[0,20]$，$(20,40]$，$(40,60]$，$(60,80]$，$(80,100]$，绘成如下频率分布直方图：



(1)求得分的平均数（每组数据以中点值代表）；

(2)学校规定得分在 80 分以上的为"垃圾分类知识达人"．为促进社区的垃圾分类，学校决定从抽取的 40 人中的"知识达人"（其中含 A，B 两位同学）中选出两人利用节假日到社区进行垃圾分类知识宣讲，求 A，B 两人至少有 1 人被选中的概率；

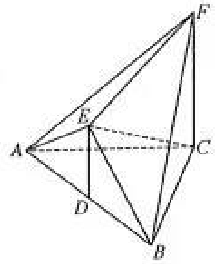
(3)从所抽取的 40 人中得分落在组$[0,40]$的选手中随机选取 3 名选手，用 X 表示这 3 名选手中得分不超过 20 分的人数，求 X 的分布列和数学期望.

19.(本小题满分 12 分)

如图,平面 $ABE\perp$ 平面 ABC,$\triangle ABC$ 是等边三角形,D 为 AB 的中点,$BC=CF=2$,$FA=FB=2\sqrt{2}$,$EA=EB=\sqrt{2}$.

(1)证明:$DE/\!/CF$;

(2)在 AB 上是否存在一点 P,使得二面角 $P-EC-B$ 为直二面角?若存在,求出点 P 的位置;若不存在,请说明理由.



20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,短轴的下端点 A 的坐标为 $(0,-1)$,且 $|AF_1|+|AF_2|=4$.

(1)求椭圆 E 的方程;

(2)设 B,C 是椭圆 E 上异于 A 的两点,且直线 BC 与坐标轴不垂直,$|AB|=|AC|$,BC 的中点为 G,求四边形 AF_1GF_2 的面积.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x-a\ln x-1(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时,求证:$f(x)\geqslant 0$;

(2)若 $x=1$ 是 $f(x)$ 唯一的零点,求 $f(x)$ 的单调区间.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)**选修 4-4:坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系 xOy 中,倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线 l 过点 $A(-1,0)$,以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$.

(1)写出直线 l 的一个参数方程及曲线 C 的直角坐标方程;

(2)若 l 与 C 交于 M,N 两点,求 $\frac{1}{|AM|}+\frac{1}{|AN|}$ 的值.

23.(本小题满分 10 分)**选修 4-5:不等式选讲**

已知 $f(x)=|x+2|+|x-1|$.

(1)解不等式 $f(x)\leqslant x+8$;

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant m^2-2m$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,求实数 m 的取值范围.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. A　由题意知 $z=1-\mathrm{i}$，所以 $\frac{5}{\bar{z}^2+1}=\frac{5}{(1-\mathrm{i})^2+1}=\frac{5}{1-2\mathrm{i}}=\frac{5(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=1+2\mathrm{i}$. 故选 A.

2. B　由题意知 $S=\left\{x \middle| x=\frac{(2k+1)\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$T=\left\{y \middle| y=\frac{(k+1)\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，所以集合 S 是集合 T 的真子集，所以 $S\quad T=S$. 故选 B.

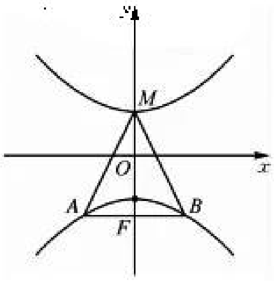
3. C　由题意知 p 为真命题，q 为假命题，所以 $p\quad q$，$\quad p\quad q$，$(p\quad q)$ 为假命题，$p\qquad q$ 为真命题. 故选 C.

4. C　显然①处应填入 $S=S+i^2$，则可排除 B、D；对于②处，因为当 $i=n$ 时，最后一个加数为 $(n-1)^2$，则可排除 A. 故选 C.

5. A　令 $x=0$，得 $a_0=1$；令 $x=1$，得 $a_0+a_1+\cdots+a_{19}=3$；展开式中 x^{19} 的系数为 2，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{18}=3-1-2=0$. 故选 A.

6. D　因为 $f(x)+f(-x)=\frac{a^x}{1+a^x}+\frac{a^{-x}}{1+a^{-x}}=\frac{a^x}{1+a^x}+\frac{1}{1+a^x}=1$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 对称，故 $f(x)$ 的图象向下平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度后得到的图象关于原点对称，即 $f(x)-\frac{1}{2}$ 为奇函数. 故选 D.

7. D　由 $B_1C_1\parallel BC$ 及 $EF\parallel B_1C_1$，得 $EF\parallel BC$，则 A 正确；由 $AD\parallel BC$，$BC\quad$ 平面 $BCFE$，$AD\not\subset$ 平面 $BCFE$，得 $AD\parallel$ 平面 $BCFE$，则 B 正确；以两个平行平面 BB_1E 和 CC_1F 为底面，其余三面都是四边形，且每相邻两个四边形的公共边都平行，符合棱柱的定义，则 C 正确；以两个平行平面 AA_1EB 和 DD_1FC 为底面，其余四面都是四边形，且每相邻两个四边形的公共边都平行，符合棱柱的定义，则 D 错误(由于 AA_1、DD_1、CF、BE 延长后，不交于一点，则几何体 AA_1EB-DD_1FC 不为棱台). 故选 D.

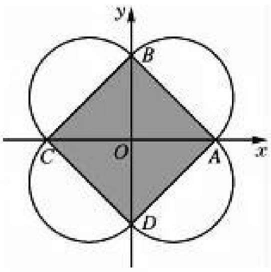


8. B　设 C 的半焦距为 c，由题意易得 $\angle AMF<45^\circ$，所以 $\tan\angle AMF<1$，即 $\frac{|AF|}{|MF|}<1$，易求 $|AF|=\frac{b^2}{a}$，$|MF|=a+c$，所以 $c^2-a^2<a^2+ac$，所以 $e^2-e-2<0$，又 $e>1$，所以 $1<e<2$. 故选 B.

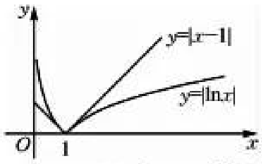
9. A　由 $\sqrt{3}b\sin C+c\cos B=a$ 及正弦定理，得 $\sqrt{3}\sin B\sin C+\sin C\cos B=\sin A$，所以 $\sqrt{3}\sin B\sin C+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，所以 $\sqrt{3}\sin B\sin C=\sin B\cos C$，又 $\sin B\neq0$，所以 $\sqrt{3}\sin C=\cos C$，所以 $\tan C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{6}$. 故选 A.

10. D　由 $3^x=4$，$4^y=9$ 得 $x=\log_3 4$，$y=\log_4 9$，所以 $xy=\log_3 4\times\log_4 9=2$，所以 $x^2y^2=4=3^x$，故 A 正确；$\log_3 4<\log_3\sqrt{27}=\frac{3}{2}$，$\log_4 9>\log_4 8=\log_4 4^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$，所以 $x<y$，故 B 正确；$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>2\sqrt{\frac{1}{xy}}=\sqrt{2}$，故 C 正确；由选项 A，得 $xy=2$，则 $2xy=4$；另一方面，$\log_3 4<2$，$\log_4 9<2$，则 $x+y<4$，所以 $x+y>2xy$ 不成立，故 D 错误. 故选 D.

11. B　由题意知曲线 C_1 和 C_2 都关于坐标轴对称，也都关于坐标原点对称，当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 时，C_1 与 C_2 的方程分别可化为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，$x+y=2$，故 C_1，C_2 在第一象限内分别为半圆（圆心为 $(1,1)$，半圆的半径为 $\sqrt{2}$）和线段 $x+y=2\,(0\leqslant x\leqslant 2)$，再利用对称性，易画出曲线 C_1 与 C_2，其中 C_1 为四个半圆组成的封闭曲线，C_2 为正方形 $ABCD$（$|AB|=2\sqrt{2}$）（如图所示），所以所求概率 $P=\dfrac{(2\sqrt{2})^2}{2\times\pi\times(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=\dfrac{2}{\pi+2}$. 故选 B.

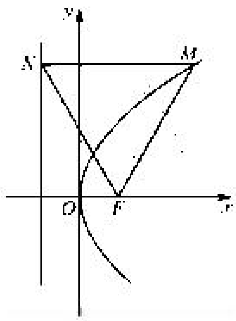


12. A　当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=-(-x)e^{-x}=\dfrac{x}{e^x}=f(x)$；当 $x>0$ 时，$-x<0$，则 $f(-x)=\dfrac{-x}{e^{-x}}=-xe^x=f(x)$，当 $x=0$ 时 $f(0)=0$. 综上，$f(x)$ 为偶函数. 又当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)=-(x+1)e^x<0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为减函数. 由 $f(x-1)>f(\ln x)$，得 $f(|x-1|)>f(|\ln x|)$，所以 $|x-1|<|\ln x|$，再考虑到 $y=x-1$ 是曲线 $y=\ln x$ 的切线方程，如图所示，满足题意的 x 的取值范围是 $(0,1)$. 故选 A.



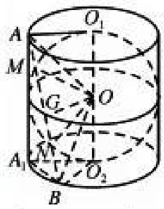
13. 1.922　由表可求 $\bar{x}=3.5$，$\bar{y}=1.23$，所以 $1.23=-0.1977\times 3.5+\hat{a}$，解得 $\hat{a}=1.922$.

14. $16\sqrt{3}$　由题意知 $|MF|=|MN|$，则 MN 与准线垂直，又 $\triangle MNF$ 为正三角形，所以 NF 与准线所成的锐角为 30°，所以 $|NF|=8$，所以 $\triangle MNF$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 8^2=16\sqrt{3}$.



15. 3　连接 AC，$AB\cdot AD+CB\cdot DA=AB\cdot AD+BC\cdot AD=(AB+BC)\cdot AD=AC\cdot AD=AD\cdot AD=(\sqrt{3})^2=3$.

16. $\sqrt{2}$（2 分）　$\sqrt{2}$（3 分）　设过 A 的圆柱 O_1O_2 的母线在底面的端点为 A_1，则 $O_1A\parallel O_2A_1$，由 $O_1A\perp O_2B$，得 $O_2A_1\perp O_2B$，则 $A_1B=\sqrt{2}$；在直角三角形 ABA_1 中，$AA_1=2$，$\tan\angle ABA_1=\dfrac{AA_1}{A_1B}=\sqrt{2}$，所以 AB 与圆柱 O_1O_2 的底面所成角的正切值为 $\sqrt{2}$；连接 OA，OB，由 $\triangle OAO_1\cong\triangle OBO_2$，得 $OA=OB$. 取 AB 的中点为 G，则 $OG\perp AB$；因为 $OA^2=O_1O^2+O_1A^2=2$，$AB=\sqrt{AA_1^2+A_1B^2}=\sqrt{6}$，所以 $OG=\sqrt{OA^2-AG^2}=\sqrt{2-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；由 $OM=ON$ 及 $OG\perp AB$，得 G 也是 MN 的中点，所以 $MN=2\sqrt{OM^2-OG^2}=2\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$.



17. 解：(1) 设公比为 q，由 $a_4=8a_1$，得 $a_1q^3=8a_1$，解得 $q=2$. ………………………………………… 1 分

由 $S_6=63$，得 $\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=63$，………………………………………………………………… 3 分

结合 $q=2$，解得 $a_1=1$，………………………………………………………………………………… 4 分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$. ………………………………………… 5 分

(2)由(1),得$b_n=2\log_2 a_n+1=2\log_2 2^{n-1}+1=2n-1$, ………………………………………… 7 分

则$\{b_n\}$是以 1 为首项,2 为公差的等差数列. ………………………………………… 8 分

由$b_7+b_8+b_9+\cdots+b_{k+7}=133$,得$(2\times7-1)(k+1)+\frac{(k+1)k}{2}\times2=133$, ………………………… 10 分

整理,得$k^2+14k-120=0$,解得$k=6$或$k=-20$(舍去)

故存在$k=6$,使得$b_7+b_8+b_9+\cdots+b_{k+7}=133$. ………………………………………… 12 分

18. 解:(1)由频率分布直方图可求得各组的频率自左到右依次为:0.1,0.15,0.3,0.25,0.2, ………………… 2 分

所以得分的平均数$\bar{x}=10\times0.1+30\times0.15+50\times0.3+70\times0.25+90\times0.2=56$. ………………… 4 分

(2)所抽取的 40 人中,得分在 80 分以上的有$40\times0.2=8$人, ………………………………………… 5 分

故所求概率为$1-\frac{C_6^2}{C_8^2}=1-\frac{15}{28}=\frac{13}{28}$. ………………………………………… 7 分

(3)X的所有可能取值为 0,1,2,3.

得分在$[0,20]$的人数$40\times0.1=4$,得分在$(20,40]$的人数为$40\times0.15=6$人. ………………………… 8 分

$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$,$P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$,$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$,$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$, ……………… 10 分

所以X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

…………………………………………………………………………

所以X的数学期望$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$. ……………

19. (1)证明:因为$EA=EB$,D为AB的中点,所以$DE\perp AB$, ……………………

因为平面$ABE\perp$平面ABC,平面$ABE\cap$平面$ABC=AB$,DE 平面ABE,

所以$DE\perp$平面ABC. ………………………………………… 2 分

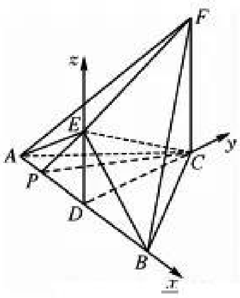
因为$BC=CF=2$,$FB=2\sqrt{2}$,所以$BC^2+CF^2=FB^2$,所以$CF\perp BC$,

同理$CF\perp AC$. ………………………………………… 3 分

因为$AC\cap BC=C$,AC,BC 平面ABC,

所以$CF\perp$平面ABC, ………………………………………… 4 分

所以$DE\parallel CF$. ………………………………………… 5 分



(2)解:连接CD,则$CD\perp AB$,由(1)知$DE\perp$平面ABC,且CD 平面ABC,

所以$DE\perp CD$,所以DB,DC,DE两两垂直. ………………………………………… 6 分

以DB,DC,DE所在直线分别为x轴,y轴,z轴建立空间直角坐标系(如图所示),则

$B(1,0,0)$,$C(0,\sqrt{3},0)$,$E(0,0,1)$,设$P(p,0,0)(p\neq0)$,所以$\overrightarrow{EC}=(0,\sqrt{3},-1)$,$\overrightarrow{EB}=$

$(1,0,-1)$，$\overrightarrow{EP}=(p,0,-1)$. ························ 7 分

设平面 BCE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot \overrightarrow{EC}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot \overrightarrow{EB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}y_1-z_1=0,\\ x_1-z_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$. ························ 9 分

设平面 PCE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot \overrightarrow{EC}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot \overrightarrow{EP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}y_2-z_2=0,\\ px_2-z_2=0,\end{cases}$

令 $y_2=p$，得 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},p,\sqrt{3}p)$. ························ 11 分

因为二面角 $P-EC-B$ 为直二面角，所以 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$，即 $3+p+3p=0$，所以 $p=-\frac{3}{4}$，

所以点 P 在线段 AD 靠近 A 的四等分点处时，二面角 $P-EC-B$ 为直二面角. ························ 12 分

20. 解：(1)由椭圆 E 短轴的下端点 A 的坐标为 $(0,-1)$，得 $b=1$； ························ 1 分

由 $AF_1 + AF_2 =4$ 及椭圆的定义，得 $2a=4$，即 $a=2$. ························ 2 分

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ························ 3 分

(2)法一(方程组法)：由直线 BC 与坐标轴不垂直，可设直线 BC 的方程为 $y=kx+n\ (k\neq0)$，代入 $x^2+4y^2=4$ 并整理

得 $(4k^2+1)x^2+8knx+4n^2-4=0$， ························ 4 分

则 $\Delta=64k^2n^2-4(4k^2+1)(4n^2-4)=16(4k^2+1-n^2)>0$. ························ 5 分

设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{8kn}{4k^2+1}$. ························ 6 分

设 BC 的中点 $G(x_0,y_0)$，则 $x_0=-\frac{4kn}{4k^2+1}$，且 $y_0=kx_0+n=\frac{n}{4k^2+1}$. ························ 7 分

因为 $AB = AC$，G 为 BC 的中点，所以 $AG\perp BC$，得 $k_{AG}\cdot k_{BC}=-1$，则 $\frac{y_0+1}{x_0}\cdot k=-1$，

即 $\dfrac{\frac{n}{4k^2+1}+1}{-\frac{4kn}{4k^2+1}}\cdot k=-1$，化简得 $n=\frac{4k^2+1}{3}$， ························ 9 分

所以 $\Delta=16\left[4k^2+1-\left(\frac{4k^2+1}{3}\right)^2\right]>0$，解得 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$，且 $k\neq0$. ························ 10 分

所以 $y_0=\frac{n}{4k^2+1}=\frac{n}{3n}=\frac{1}{3}$， ························ 11 分

所以四边形 AF_1GF_2 的面积 $S=\frac{1}{2}\ F_1F_2\ \times(\ y_0\ +\ y_A\ )=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. ························ 12 分

法二(点差法)：设 BC 的中点 $G(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$，$\frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1$， ························ 5 分

两式相减，得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{4}+(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$. ························ 6 分

由直线 BC 与坐标轴不垂直，得 $x_1\neq x_2$，

所以 BC 的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{2x_0}{2y_0}=-\frac{x_0}{4y_0}$，即 $k=-\frac{x_0}{4y_0}$； ························ 7 分

由 $k_{AG}\cdot k=-1$，得 $\frac{y_0+1}{x_0-0}\times k=-1$，所以 $\frac{y_0+1}{x_0-0}\times\left(-\frac{x_0}{4y_0}\right)=-1$。 ······························ 8 分

所以 $y_0=\frac{1}{3}$，所以 $x_0=-\frac{4k}{3}$，所以 $G\left(-\frac{4k}{3},\frac{1}{3}\right)$。 ······························ 9 分

因为 $G\left(-\frac{4k}{3},\frac{1}{3}\right)$ 在椭圆的内部，所以 $\frac{1}{4}\times\left(-\frac{4k}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2<1$，解得 $k^2<2$。

由 BC 与 y 轴不垂直，得 $k\neq0$，所以 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$，且 $k\neq0$。 ······························ 10 分

于是点 $G\left(-\frac{4k}{3},\frac{1}{3}\right)(-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ 且 $k\neq0)$。 ······························ 11 分

所以四边形 AF_1GF_2 的面积为 $S=\frac{1}{2}|F_1F_2|\times(|y_0|+|y_A|)=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}$。 ······························ 12 分

21.(1)证明：当 $a=1$ 时，$f(x)=x-\ln x-1$，定义域为 $(0,+\infty)$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$。 ······························ 1 分

所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$。 ······························ 2 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增。 ······························ 3 分

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=0$。

故当 $a=1$ 时，$f(x)\geq0$。 ······························ 4 分

(2)解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$。 ······························ 5 分

①当 $a\leq0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数。

又 $f(1)=0$，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 唯一的零点。

此时，适合题意，故 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$，没有单调减区间。 ······························ 6 分

②当 $a>0$ 时，当 $0<x<a$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$。

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上为减函数，在 $(a,+\infty)$ 上为增函数。

所以 $f(x)_{\min}=f(a)=a-a\ln a-1$。 ······························ 7 分

(ⅰ)当 $a=1$ 时，$f(x)_{\min}=0$，且 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 唯一的零点，

此时，适合题意，其单调减区间为 $(0,1)$，单调增区间为 $(1,+\infty)$； ······························ 8 分

(ⅱ)当 $0<a<1$ 时，由 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，得 $f(a)<f(1)=0$。

取 $ae^{-\frac{1}{a}}\in(0,a)$，因为 $f(ae^{-\frac{1}{a}})=ae^{-\frac{1}{a}}-a\left(\ln a-\frac{1}{a}\right)-1=ae^{-\frac{1}{a}}-a\ln a=a(e^{-\frac{1}{a}}-\ln a)>0$， ······························ 9 分

所以存在 $x_0\in(ae^{-\frac{1}{a}},a)$，使得 $f(x_0)=0$，即 $f(x)$ 在 $(ae^{-\frac{1}{a}},a)$ 上还有一个零点，所以 $f(x)$ 在其定义域上不止一个零点，不合题意； ······························ 10 分

(ⅲ)当 $a>1$ 时，由 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上为减函数，得 $f(a)<f(1)=0$。

由(1)，得 $x-\ln x-1\geq0$(当且仅当 $x=1$ 时取等号)，即 $\ln x\leq x-1$，则 $\ln a<a-1$，

所以 $f(a^3)=a^3-a\ln a^3-1=a^3-3a\ln a-1>a^3-3a(a-1)-1=(a-1)^3>0$， ······························ 11 分

所以 $f(x)$ 在 (a,a^3) 上还有一个零点，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不止一个零点，不合题意。

综上，当 $a\leq0$ 时，$f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$，没有减区间；

当 $a=1$ 时，$f(x)$ 的单调减区间为 $(0,1)$，单调增区间为 $(1,+\infty)$. ………… 12 分

22. 解：(1)因为 l 过点 $A(-1,0)$ 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，

所以 l 的一个参数方程为 $\begin{cases} x=-1+\frac{1}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)；………… 2 分

因为 $\rho=4\sin\theta$，所以 $\rho^2=4\rho\sin\theta$，

又 $\rho^2=x^2+y^2$，$y=\rho\sin\theta$，所以 $x^2+y^2=4y$，即 $x^2+(y-2)^2=4$. ………… 4 分

(2)将 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程，得 $t^2-(2\sqrt{3}+1)t+1=0$，………… 6 分

则 $\Delta=(-2\sqrt{3}-1)^2-4=9+4\sqrt{3}>0$，………… 7 分

设点 M，N 所对应的参数分别为 t_1，t_2，则 $t_1+t_2=2\sqrt{3}+1$，$t_1t_2=1$，

由于 $t_1+t_2>0$，$t_1t_2>0$，所以 t_1，t_2 均大于 0. ………… 8 分

所以 $\frac{1}{|AM|}+\frac{1}{|AN|}=\frac{|AM|+|AN|}{|AM|\cdot|AN|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1|\cdot|t_2|}=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=2\sqrt{3}+1$. ………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)=|x+2|+|x-1|=\begin{cases} -2x-1, x<-2, \\ 3, -2\leqslant x<1, \\ 2x+1, x\geqslant 1. \end{cases}$ ………… 1 分

当 $x<-2$ 时，$f(x)\leqslant x+8$ 可化为 $-2x-1\leqslant x+8$，解得 $x\geqslant -3$，所以 $-3\leqslant x<-2$；………… 2 分

当 $-2\leqslant x<1$ 时，$f(x)\leqslant x+8$ 可化为 $3\leqslant x+8$，解得 $x\geqslant -5$，所以 $-2\leqslant x<1$；………… 3 分

当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant x+8$ 可化为 $2x+1\leqslant x+8$，解得 $x\leqslant 7$，所以 $1\leqslant x\leqslant 7$. ………… 4 分

综上，不等式 $f(x)\leqslant x+8$ 的解集为 $[-3,7]$. ………… 5 分

(2)关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant m^2-2m$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立等价于 $f(x)_{\min}\geqslant m^2-2m$，………… 6 分

$f(x)=|x+2|+|x-1|\geqslant|x+2-x+1|=3$，………… 7 分

当且仅当 $(x+2)(x-1)\leqslant 0$，即 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时等号成立，所以 $f(x)_{\min}=3$，………… 8 分

所以 $3\geqslant m^2-2m$，解得 $-1\leqslant m\leqslant 3$.

故实数 m 的取值范围为 $[-1,3]$. ………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。