

长沙市一中 2023 届高三月考试卷（四）

数学

时量：120 分钟 满分：150 分

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | 3 < x < 8\}$, $B = \{6, 7, 8\}$, 全集 $U = A \cup B$, 则 $\complement_U(A \cap B)$ 的所有子集个数 ()

- A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

2. 已知复数 z 满足 $zi = 3i + 4$, 其中 i 为虚数单位, 则 \bar{z} 在复平面内对应点在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 N 满足 $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{NC}$, 记 $\overrightarrow{BN} = \vec{a}$, $\overrightarrow{NC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BA} =$ ()

- A. $\vec{a} - 2\vec{b}$ B. $\vec{a} + 2\vec{b}$ C. $\vec{a} - \vec{b}$ D. $\vec{a} + \vec{b}$

4. 已知 $a = \lg \frac{1}{2}$, $b = 2^{0.1}$, $c = \sin 3$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $b > a > c$ D. $c > b > a$

5. 2022 年 9 月 16 日, 接迎第九批在韩志愿军烈士遗骸回国的运-20 专机在两架歼-20 战斗机护航下抵达沈阳国际机场。歼-20 战机是我国自主研发的第五代最先进的战斗机, 它具有高隐身性、高态势感知、高机动性能等特点, 歼-20 机身头部是一个圆锥形, 这种圆锥的轴截面是一个边长约为 2 米的正三角形则机身头部空间大约 () 立方米

- A. $\sqrt{3}\pi$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ C. $\sqrt{2}\pi$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

6. 已知函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$), 将 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 已知 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上恰有 5 个零点, 则 ω 的取值范围是 ()

- A. $\left[2, \frac{8}{3}\right)$ B. $\left(2, \frac{7}{3}\right]$ C. $\left(2, \frac{8}{3}\right]$ D. $\left[2, \frac{7}{3}\right)$

7. 用 1, 2, 3, 4, 5, 6 组成六位数 (没有重复数字), 在任意相邻两个数字的奇偶性不同的条件下, 1 和 2 相邻的概率是 ()

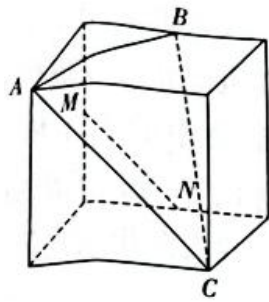
- A. $\frac{5}{18}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{5}{9}$ D. $\frac{13}{18}$

8. 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = AA_1 = 2$, $BC = \sqrt{3}AC$, 当该三棱柱体积最大时, 其外接球的体积为 ()

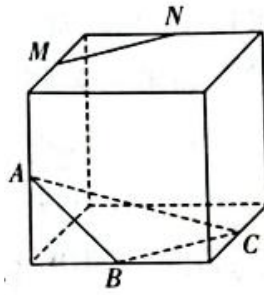
- A. $\frac{28\sqrt{21}}{27}\pi$ B. $\frac{32}{3}\pi$ C. $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$ D. $\frac{28\sqrt{7}}{9}\pi$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

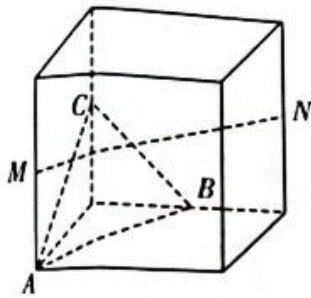
9. 如图, 点 A, B, C, M, N 是正方体的顶点或所在棱的中点, 则满足 $MN \parallel$ 平面 ABC 的有 ()



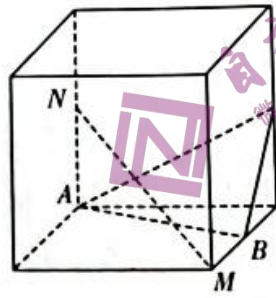
A.



B.



C.



D.

10. 已知抛物线 $C: y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F , P 为 C 上一点, 下列说法正确的是 ()

- A. C 的准线方程为 $y = -\frac{1}{16}$
- B. 直线 $y = x - 1$ 与 C 相切
- C. 若 $M(0, 4)$, 则 $|PM|$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$
- D. 若 $M(3, 5)$, 则 $\triangle PMF$ 的周长的最小值为 11

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 若 $a_n = \frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$), 则下列结论中正确的是 ()

- A. $a_3 = \frac{6}{11}$
- B. $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{2}$
- C. $a_n \cdot \ln(n+1) < 1$
- D. $\frac{1}{a_{2n}} - \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{2}$

12. 已知偶函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上可导, $f(0) = -1$, $g(x) = f'(x)$, 若 $f(x+1) - f(1-x) = 2x$, 则 ()

- A. $g(0) = 0$
- B. $g(2023) = 2023$
- C. $f(3) = 3$
- D. $f(-2n) = 2n^2 - 1$ ($n \in \mathbf{N}$)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 16$, 若直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 则 $\triangle ABC$ 的面积最大值为 _____.

14. 若 $(3x + \sqrt{x})^n$ 的展开式的所有项的系数和与二项式系数和的比值是 32, 则展开式中 x^3 项的系数是 _____.

15. 已知点 F_1 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点, 过原点作直线 l 交椭圆于 A, B 两点, M, N 分别是 AF_1, BF_1 的中点, 若存在以 MN 为直径的圆过原点, 则椭圆的离心率的范围是 _____.

16. 设函数 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2ax$ ($a > 0$) 的图象与 $g(x) = a^2 \ln x + b$ 的图象有公共点, 且在公共点处切线方程相同, 则实数 b 的最大值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足: $2S_n = 3(a_n - 1)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本题满分 12 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 S , 已知 D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$.

(1) 若 $\angle BAC = \frac{2}{3}\pi$, $AB = 4$, $AC = 2$, 求 AD 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 请从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 求 $\frac{BD}{DC}$ 的取值范围.

条件①: $\sqrt{3}(b^2 + c^2 - a^2) = 4S$;

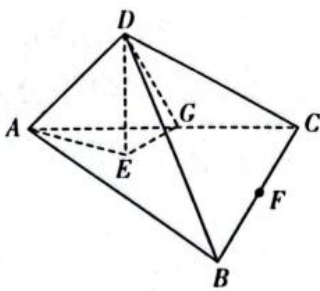
条件②: $4\sin^2 B - 8\sin^2 \frac{B}{2} - 1 = 0$;

条件③: $\sin^2 B + \cos^2 C - \cos^2 A = \sqrt{3} \sin A \sin B$.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. (本题满分 12 分)

如图, 点 E 在 $\triangle ABC$ 内, DE 是三棱锥 $D-ABC$ 的高, 且 $DE = 2$. $\triangle ABC$ 是边长为 6 的正三角形, $DB = DC = 5$, F 为 BC 的中点.



(1) 证明: 点 E 在 AF 上;

(2) 点 G 是棱 AC 上的一点 (不含端点), 求平面 DEG 与平面 BCD 所成夹角余弦值的最大值.

20. (本题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 经过点 $(2, -3)$, 两条渐近线的夹角为 60° , 直线 l 交双曲线 C 于 A, B 两点.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若动直线 l 经过双曲线的右焦点 F_2 , 是否存在 x 轴上的定点 $M(m, 0)$, 使得以线段 AB 为直径的圆恒过 M 点? 若存在, 求实数 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

某中学 2022 年 10 月举行了 2022 “翱翔杯” 秋季运动会, 其中有 “夹球跑” 和 “定点投篮” 两个项目, 某班代表队共派出 1 男 (甲同学) 2 女 (乙同学和丙同学) 三人参加这两个项目, 其中男生单独完成 “夹球跑” 的概率为 0.6, 女生单独完成 “夹球跑” 的概率为 a ($0 < a < 0.4$). 假设每个同学能否完成 “夹球跑” 互不影响, 记这三名同学能完成 “夹球跑” 的人数为 ξ .

(1) 证明: 在的概率分布中, $P(\xi=1)$ 最大.

(2) 对于 “定点投篮” 项目, 比赛规则如下: 该代表队先指派一人上场投篮, 如果投中, 则比赛终止, 如果没有投中, 则重新指派下一名同学继续投篮, 如果三名同学均未投中, 比赛也终止. 该班代表队的领队了解后发现, 甲、乙、丙三名同学投篮命中的概率依次为 $t_i = P(\xi=i)$ ($i=1, 2, 3$), 每位同学能否命中相互独立. 请帮领队分析如何安排三名同学的出场顺序, 才能使得该代表队出场投篮人数的均值最小? 并给出证明.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sin x - x + m \ln x$, $m \neq 0$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 求 m 的取值范围;

(2) 设 $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 且满足 $\cos \alpha = 1 + \alpha \sin \alpha$, 证明: 当 $0 < m < -a^2 \sin \alpha$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上恰有两个极值点.

长沙市一中 2023 届高三月考试卷 (四)

数学参考答案

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	A	B	B	D	C	C

1. C 【解析】依题意, $A = \{4, 5, 6, 7\}$, 而 $B = \{6, 7, 8\}$, 则 $U = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \cap B = \{6, 7\}$, 因此 $\partial_U(A \cap B) = \{4, 5, 8\}$, 所以 $\partial_U(A \cap B)$ 的所有子集个数是 $2^3 = 8$. 故选: C.

2. A 【解析】由题得 $z = \frac{3i+4}{i} = 3-4i$, 所以 $\bar{z} = 3+4i$. 所以 \bar{z} 在复平面内对应点在第一象限. 故选: A.

3. A 【解析】 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{BN} - 2\overrightarrow{NC} = \vec{a} - 2\vec{b}$. 故选: A.

4. B 【解析】 $a = \lg \frac{1}{2} < \lg 1 = 0$, $b = 2^{0.1} > 2^0 = 1$, $0 < \sin 3 < 1$, $\therefore b > c > a$. 故选: B.

5. B 【解析】根据圆锥的轴截面是一个边长约为 2 米的正三角形可知, 圆锥底面半径为 1 米, 圆锥高为 $\sqrt{3}$ 米, 根据圆锥体积公式得 $V = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \pi \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi$. 故选: B.

6. D 【解析】 $g(x) = \cos\left(2\omega x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$, 令 $t = 2\omega x - \frac{\pi}{3}$, 由题意 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上恰有 5 个零点, 即

$\cos t = \frac{1}{2}$ 在 $t \in \left[-\frac{\pi}{3}, 2\pi\omega - \frac{\pi}{3}\right]$ 上恰有 5 个不相等的实根, 由 $y = \cos t$ 的性质可得 $\frac{11\pi}{3} \leq 2\pi\omega - \frac{\pi}{3} < \frac{13\pi}{3}$,

解得 $2 \leq \omega < \frac{7}{3}$. 故选: D.

7. C 【解析】将 3 个偶数排成一排有 A_3^3 种, 再将 3 个奇数分两种情况插空有 $2A_3^3$ 种,

所以任意相邻两个数字的奇偶性不同的 6 位数有 $2A_3^3 A_3^3 = 72$ 种,

任意相邻两个数字的奇偶性不同且 1 和 2 相邻, 分两种情况讨论:

当个位是偶数: 2 在个位, 则 1 在十位, 此时有 $A_2^2 A_2^2 = 4$ 种;

2 不在个位: 将 4 或 6 放在个位, 百位或万位上放 2, 在 2 的两侧选一个位置放 1, 最后剩余的 2 个位置放其它两个奇数, 此时有 $C_2^1 C_2^1 C_2^1 A_2^2 = 16$ 种;

所以个位是偶数共有 20 种;

同理, 个位是奇数也有 20 种, 则任意相邻两个数字的奇偶性不同且 1 和 2 相邻的数有 40 种,

所以任意相邻两个数字的奇偶性不同的条件下, 1 和 2 相邻的概率是 $\frac{40}{72} = \frac{5}{9}$. 故选: C.

8. C 【解析】解法一: 因为三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 为直三棱柱, 所以 $AA_1 \perp$ 平面 ABC ,

所以要使三棱柱的体积最大, 则 $\triangle ABC$ 面积最大,

因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin \angle ACB$,

令 $AC = x$, 因为 $BC = \sqrt{3}AC$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 \cdot \sin \angle ACB$,

在 $\triangle ABC$ 中, $\cos \angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{4x^2 - 4}{2\sqrt{3}x^2}$,

所以 $\sin^2 \angle ACB = 1 - \frac{16(x^2 - 1)^2}{12x^4} = \frac{-4x^4 + 32x^2 - 16}{12x^4}$,

所以 $(S_{\triangle ABC})^2 = \frac{3}{4} x^4 \cdot \sin^2 \angle ACB = \frac{3}{4} \cdot \frac{-x^4 + 8x^2 - 4}{3} = \frac{-(x^2 - 4)^2 + 12}{4} \leq 3$,

所以当 $x^2 = 4$, 即 $AC = 2$ 时, $(S_{\triangle ABC})^2$ 取得最大值 3,

所以当 $AC = 2$ 时, $S_{\triangle ABC}$ 取得最大值 $\sqrt{3}$, 此时 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, $AB = AC = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$,

所以 $\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4 + 4 - 12}{2 \times 2 \times 2} = -\frac{1}{2}$, $\angle BAC \in (0, \pi)$,

所以 $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$,

由正弦定理得 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 r 满足 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = 4 = 2r$, 即 $r = 2$,

所以直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 外接球的半径 $R^2 = r^2 + \left(\frac{AA_1}{2}\right)^2 = 5$, 即 $R = \sqrt{5}$,

所以直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 外接球的体积为 $\frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$. 故选: C.

解法二: 在平面 ABC 中, 由 $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}AC$ 知, 平面 ABC 中 C 点的轨迹是阿氏圆, 建立坐标系可求出该阿氏圆的半径为 $\sqrt{3}$. 要使三棱柱的体积最大, 则 $\triangle ABC$ 面积最大, 此时可计算出外接圆半径为 2.

所以直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 外接球的半径 $R^2 = 2^2 + \left(\frac{AA_1}{2}\right)^2 = 5$, 即 $R = \sqrt{5}$,

所以直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 外接球的体积为 $\frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$.

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

题号	9	10	11	12
答案	AD	BC	ABC	ABD

9. AD 【解析】对于 A 选项, 由图 1 可知 $MN \parallel DE \parallel AC$, $MN \not\subset$ 平面 ABC , $AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $MN \parallel$ 平面 ABC , A 正确;

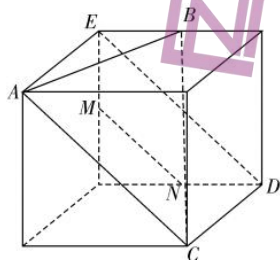


图 1

对于 B 选项, 设 H 是 EG 的中点, 由图 2, 结合正方体的性质可知, $AB \parallel NH$, $MN \parallel AH \parallel BC$, $AM \parallel CH$, 所以 A, B, C, H, N, M 六点共面, B 错误;

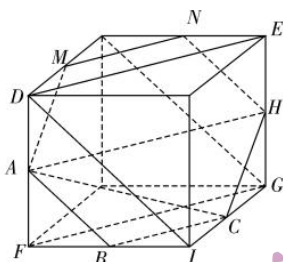


图 2

对于 C 选项, 如图 3 所示, 根据正方体的性质可知 $MN \parallel AD$, 由于 AD 与平面 ABC 相交, 所以 MN 与平面 ABC 相交. 所以 C 错误;

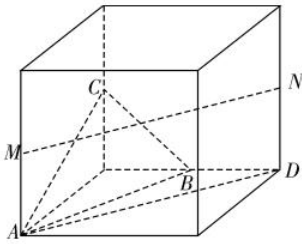


图 3

对于 D 选项，如图 4，设 $AC \cap NE = D$ ，由于四边形 $AECN$ 是矩形，所以 D 是 NE 中点，由于 B 是 ME 中点，所以 $MN \parallel BD$ ，由于 $MN \not\subset$ 平面 ABC ， $BD \subset$ 平面 ABC ，所以 $MN \parallel$ 平面 ABC ，D 正确。

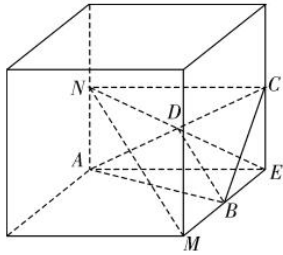


图 4

故选：AD.

10. BCD 【解析】抛物线 $C: y = \frac{1}{4}x^2$ ，即 $x^2 = 4y$ ，所以焦点坐标为 $F(0,1)$ ，准线方程为 $y = -1$ ，故

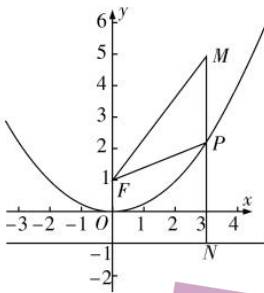
A 错误；

由 $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2, \\ y = x - 1, \end{cases}$ 即 $x^2 - 4x + 4 = 0$ ，解得 $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 = 0$ ，所以直线 $y = x - 1$ 与 C 相切，故 B 正确；

点 $P(x, y)$ ，所以 $|PM|^2 = x^2 + (y - 4)^2 = y^2 - 4y + 16 = (y - 2)^2 + 12 \geq 12$ ，

所以 $|PM|_{\min} = 2\sqrt{3}$ ，故 C 正确；

如图过点 P 作 $PN \perp$ 准线，交于点 N ， $|NP| = |PF|$ ， $|MF| = \sqrt{3^2 + (5-1)^2} = 5$ ，



所以周长 $C_{\triangle PFM} = |MF| + |MP| + |PF| = |MF| + |MP| + |PN| \geq |MF| + |MN| = 5 + 6 = 11$ ，当且仅当 M, P, N 三点共线时取等号，故 D 正确；

故选：BCD.

11. ABC 【解析】因为 $a_n = \frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$ ，故可得 $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{n}$ ，

$$\frac{1}{a_n} = \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \right) + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1,$$

对 A: 当 $n=3$ 时, $\frac{1}{a_3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$, 故可得 $a_3 = \frac{6}{11}$, 故 A 正确;

对 B: 因为 $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{n}$, 则 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n+1}$ 对 $n=1$ 也成立,

又当 $n \geq 1, n \in \mathbf{N}^*$ 时, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{2}$, 故 B 正确;

对 C: 令 $f(x) = \ln(x+1) - x$ ($x > 0$), 则 $f'(x) = \frac{-x}{x+1} < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

则 $f(x) < f(0) = 0$, 则当 $x > 0$ 时, $\ln(x+1) < x$, $\ln\left(\frac{1}{x}+1\right) < \frac{1}{x}$;

则当 $n \geq 1, n \in \mathbf{N}^*$ 时, $\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) < \frac{1}{n}$, 即 $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$;

则 $\ln(n+1) = [\ln(n+1) - \ln n] + [\ln n - \ln(n-1)] + \cdots + (\ln 2 - \ln 1) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1$,

即 $\ln(n+1) < \frac{1}{a_n}$, 又 $a_n > 0$, $a_n \cdot \ln(n+1) < 1$, 故 C 正确;

对 D: $\frac{1}{a_{2n}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}$, 故 D 错误.

故选: ABC.

12. ABD 【解析】因为函数 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的斜率为 0, 即 $g(0) = f'(0) = 0$, 故 A 正确;

函数 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $g(x)$ 为奇函数, $f(x+1) - f(1-x) = 2x$,

所以 $g(x+1) + g(1-x) = 2$, 令 $x=0$, 得 $g(1) = 1$, 又 $g(x)$ 为奇函数, 所以 $g(x+1) - g(x-1) = 2$,

$g(2023) = g(2023) - g(2021) + g(2021) - g(2019) + \cdots + g(3) - g(1) + g(1) = 2 \times 1011 + 1 = 2023$,

故 B 正确;

假设 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$, 满足 $f(x)$ 为偶函数, $f(0) = -1$, $f(x+1) - f(1-x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 = 2x$,

符合题目的要求, 此时, $f(3) = \frac{7}{2}$, 故 C 错;

$f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x+1) - f(x-1) = 2x$, 即 $f(x-1) - f(x+1) = -2x$,

$f(-2n) = f(-2n) - f(-2n+2) + f(-2n+2) - f(-2n+4) + \cdots + f(-2) - f(0) + f(0)$

$= -2(1-2n) - 2(3-2n) - \cdots - 2 \cdot (-1) - 1 = \frac{[-2(1-2n)+2]n}{2} - 1 = 2n^2 - 1$ ($n \in \mathbf{N}$), 故 D 正确.

故选: ABD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 8 【解析】圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 16$ 的圆心为 $(1,0)$ ，半径为 4，

设线段 AB 的中点为 M ，

由垂径定理得： $AM^2 + MC^2 = 16$ ，

由基本不等式可得： $AM^2 + MC^2 = 16 \geq 2AM \cdot MC$ ，

所以 $AM \cdot MC \leq 8$ ，当且仅当 $AM = MC$ 时，等号成立，

则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CM = AM \cdot CM \leq 8$ ，故答案为：8。

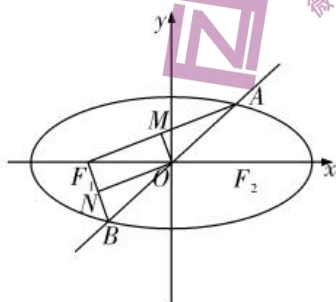
14. 15 【解析】令 $x=1$ ，得所有项的系数和为 4^n ，二项式系数和为 2^n ，所以 $\frac{4^n}{2^n} = 2^n = 32$ ，即 $n=5$ ，

$(3x + \sqrt{x})^5$ 的第 $r+1$ 项为 $C_5^r \cdot (3x)^{5-r} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^r = C_5^r \cdot 3^{5-r} \cdot x^{5-\frac{r}{2}}$ ，

令 $5 - \frac{r}{2} = 3$ ，得 $r=4$ ，所以 x^3 项的系数是 $C_5^4 \times 3 = 15$ ，故答案为：15。

15. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ 【解析】如图所示，当点 M ， N 分别是 AF_1 ， BF_1 的中点时， OM ， ON 是 $\triangle ABF_1$ 的两

条中位线，若以 MN 为直径的圆过原点，则有 $OM \perp ON$ ， $AF_1 \perp BF_1$ ，



解法一：所以在直角 $\triangle ABF_1$ 中， $|AB| = 2|OF_1| = 2c$ ，即 A 、 B 为以原点为圆心， c 为半径的圆与椭圆的交点，所以 $b \leq c$ ，即 $b^2 \leq c^2$ ，

所以 $a^2 \leq 2c^2$ ，故 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq e$ ，又 $e < 1$ ，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq e < 1$ 。

解法二：由上可知， $AF_1 \perp BF_1$ ，

设点 $A(x_0, y_0)$ ，则点 $B(-x_0, -y_0)$ ，又点 $F_1(-c, 0)$ ，

所以 $\overrightarrow{AF_1} = (-c - x_0, -y_0)$ ， $\overrightarrow{BF_1} = (-c + x_0, y_0)$ ，

则 $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{BF_1} = c^2 - x_0^2 - y_0^2 = 0$ ，又 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ ，

所以 $\frac{c^2}{a^2} x_0^2 + b^2 - c^2 = 0$ ，得 $x_0^2 = \frac{a^2(c^2 - b^2)}{c^2}$ ，

即只需 $0 \leq \frac{a^2(c^2 - b^2)}{c^2} < a^2$ ，整理得： $2c^2 \geq a^2$ ，

解得 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq e$, 又 $e < 1$, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq e < 1$. 故答案为: $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

16. $\frac{1}{2e^2}$ 【解析】设公共点坐标为 (x_0, y_0) , 则 $f'(x) = 3x - 2a$, $g'(x) = \frac{a^2}{x}$ ($x > 0$),

所以有 $f'(x_0) = g'(x_0)$, 即 $3x_0 - 2a = \frac{a^2}{x_0}$, 解得 $x_0 = a$ ($x_0 = -\frac{a}{3}$ 舍去),

又 $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$, 所以有 $\frac{3}{2}x_0^2 - 2ax_0 = a^2 \ln x_0 + b$,

故 $b = \frac{3}{2}x_0^2 - 2ax_0 - a^2 \ln x_0$,

所以有 $b = -\frac{1}{2}a^2 - a^2 \ln a$, 对 b 求导有 $b' = -2a(1 + \ln a)$,

故 b 关于 a 的函数在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 为增函数, 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 为减函数,

所以当 $a = \frac{1}{e}$ 时 b 有最大值 $\frac{1}{2e^2}$. 故答案为: $\frac{1}{2e^2}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】(1) 由已知 $2S_n = 3(a_n - 1)$, $n \in \mathbf{N}^*$,

当 $n = 1$ 时, $2S_1 = 3(a_1 - 1)$, 解得 $a_1 = S_1 = 3$,

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = 3(a_{n-1} - 1)$,

则 $2a_n = 3(a_n - 1) - 3(a_{n-1} - 1)$, 即 $a_n = 3a_{n-1}$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列,

所以 $a_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$;

(2) 由 (1) 得 $a_n = 3^n$, 则 $b_n = na_n = n \cdot 3^n$,

所以 $T_n = 1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + (n-1) \times 3^{n-1} + n \times 3^n$ ①,

$3T_n = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + \cdots + (n-1) \times 3^n + n \times 3^{n+1}$ ②,

① - ② 得 $-2T_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n - n \times 3^{n+1} = \frac{3(1-3^n)}{1-3} - n \times 3^{n+1} = \frac{-3 - (2n-1)3^{n+1}}{2}$,

所以 $T_n = \frac{3 + (2n-1)3^{n+1}}{4}$.

18. 【解析】(1) 依题意可得 $S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$,

可得 $\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD + \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \sin \angle DAC$,

又因为 AD 平分 $\angle BAC$, 且 $\angle BAC = \frac{2}{3}\pi$, 所以 $\angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{3}\pi$,

$$\text{则 } \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times 4 \times AD \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times AD \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{整理可得 } AD = \frac{4}{3}.$$

(2) 选条件①:

$$\therefore \sqrt{3}(b^2 + c^2 - a^2) = 4 \times \frac{1}{2} bc \sin A,$$

$$\therefore \sqrt{3} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \sin A, \therefore \sqrt{3} \cos A = \sin A, \text{ 即 } \tan A = \sqrt{3},$$

$$\therefore A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore A = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}, \therefore BD = \frac{AB \cdot \sin \angle BAD}{\sin \angle ADB},$$

$$\text{在 } \triangle ADC \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}, \therefore CD = \frac{AC \cdot \sin \angle CAD}{\sin \angle ADC},$$

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$, $\angle ADB$ 与 $\angle ADC$ 互补,

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{\frac{AB \cdot \sin \angle BAD}{\sin \angle ADB}}{\frac{AC \cdot \sin \angle CAD}{\sin \angle ADC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)}{\sin B} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{2 \tan B} + \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 是锐角三角形, } \therefore \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}, \therefore \tan B > \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2 \tan B} + \frac{1}{2} < 2, \text{ 即 } \frac{BD}{DC} \text{ 的取值范围为 } \left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

选条件②:

$$\therefore 4 \sin^2 B - 8 \times \frac{1 - \cos B}{2} - 1 = 0,$$

$$\therefore 4 \sin^2 B + 4 \cos B - 5 = 0, \therefore 4(1 - \cos^2 B) + 4 \cos B - 5 = 0,$$

$$\therefore (2 \cos B - 1)^2 = 0, \therefore \cos B = \frac{1}{2},$$

$$\therefore B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore B = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}, \therefore BD = \frac{AB \cdot \sin \angle BAD}{\sin \angle ADB},$$

$$\text{在 } \triangle ADC \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}, \therefore CD = \frac{AC \cdot \sin \angle CAD}{\sin \angle ADC},$$

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$, $\angle ADB$ 与 $\angle ADC$ 互补,

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{\frac{AB \cdot \sin \angle BAD}{\sin \angle ADB}}{\frac{AC \cdot \sin \angle CAD}{\sin \angle ADC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin C}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin C.$$

$\because \triangle ABC$ 是锐角三角形, $\therefore \frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}$,

$$\therefore \frac{1}{2} < \sin C < 1, \therefore \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin C < \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} \text{ 的取值范围为 } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right).$$

选条件③:

$$\therefore \sin^2 B + (1 - \sin^2 C) - (1 - \sin^2 A) = \sqrt{3} \sin A \sin B,$$

$$\therefore \sin^2 B + \sin^2 A - \sin^2 C = \sqrt{3} \sin A \sin B,$$

由正弦定理得 $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{3}ab$,

$$\therefore \text{根据余弦定理得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}ab}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore C \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), \therefore C = \frac{\pi}{6},$$

在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$, $\therefore BD = \frac{AB \cdot \sin \angle BAD}{\sin \angle ADB}$,

在 $\triangle ADC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$, $\therefore CD = \frac{AC \cdot \sin \angle CAD}{\sin \angle ADC}$,

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $\angle ADB$ 与 $\angle ADC$ 互补,

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{\frac{AB \cdot \sin \angle BAD}{\sin \angle ADB}}{\frac{AC \cdot \sin \angle CAD}{\sin \angle ADC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\frac{1}{2}}{\sin B} = \frac{1}{2\sin B}.$$

$\because \triangle ABC$ 是锐角三角形, $\therefore \frac{\pi}{3} < B < \frac{\pi}{2}$,

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin B < 1, \therefore 1 < \frac{1}{\sin B} < \frac{2}{\sqrt{3}}, \therefore \frac{1}{2} < \frac{1}{2\sin B} < \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} \text{ 的取值范围为 } \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

19. 【解析】(1) 证明: 连接 EF , DF .

因为 DE 是三棱锥 $D-ABC$ 的高, 即 $DE \perp$ 平面 ABC ,

因为 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $DE \perp BC$.

因为 $DB = DC = 5$, BC 的中点为 F , 所以 $DF \perp BC$,

因为 $DE \cap DF = D$, $DE, DF \subset$ 平面 DEF , 所以 $BC \perp$ 平面 DEF ,

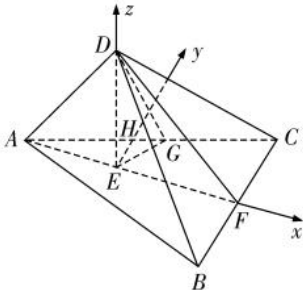
因为 $EF \subset$ 平面 DEF ，所以 $BC \perp EF$ 。

又因为 $\triangle ABC$ 是边长为 6 的正三角形， BC 的中点为 F ，所以 $BC \perp AF$ ，即点 E 在 AF 上。

$$(2) \text{ 结合 (1) 得, } AF = 3\sqrt{3}, DF = \sqrt{BD^2 - BF^2} = 4,$$

$$EF = \sqrt{DF^2 - DE^2} = 2\sqrt{3}, AE = AF - EF = \sqrt{3}.$$

过点 E 作 $EH \parallel BC$ ，交 AC 于 H ，结合 (1) 可知 EF ， EH ， ED 两两垂直，所以以 E 为坐标原点， \overrightarrow{EF} ， \overrightarrow{EH} ， \overrightarrow{ED} 的方向分别为 x ， y ， z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



$$A(-\sqrt{3}, 0, 0), B(2\sqrt{3}, -3, 0), C(2\sqrt{3}, 3, 0), D(0, 0, 2)$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BD} = (-2\sqrt{3}, 3, 2), \overrightarrow{BC} = (0, 6, 0).$$

设平面 BCD 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{BD} \cdot \vec{m} = 0, \\ \overrightarrow{BC} \cdot \vec{m} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -2\sqrt{3}x_1 + 3y_1 + 2z_1 = 0, \\ 6y_1 = 0, \end{cases} \text{ 取 } x_1 = 1, \text{ 则 } \vec{m} = (1, 0, \sqrt{3}).$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AC} = (3\sqrt{3}, 3, 0),$$

$$\text{设 } \overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AC}, \lambda \in (0, 1).$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \lambda \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{3}, 0, 0) + \lambda(3\sqrt{3}, 3, 0) = (3\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}, 3\lambda, 0).$$

设平面 DEG 的法向量为 $\vec{u} = (x_2, y_2, z_2)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{ED} \cdot \vec{u} = 0, \\ \overrightarrow{EG} \cdot \vec{u} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2z_2 = 0, \\ (3\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3})x_2 + 3\lambda y_2 = 0, \end{cases} \text{ 取 } x_2 = \sqrt{3}, \text{ 则 } \vec{u} = \left(\sqrt{3}, \frac{1}{\lambda} - 3, 0\right).$$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{u}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{u} \cdot \vec{m}}{|\vec{u}| |\vec{m}|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3 + \left(\frac{1}{\lambda} - 3\right)^2}} \leq \frac{1}{2}, \text{ 当且仅当 } \lambda = \frac{1}{3} \text{ 时, 等号成立.}$$

所以平面 DEG 与平面 BCD 所成夹角余弦值的最大值为 $\frac{1}{2}$ 。

20. 【解析】(1) \because 两条渐近线的夹角为 60° ，

$$\therefore \text{渐近线的斜率 } \pm \frac{b}{a} = \pm \sqrt{3} \text{ 或 } \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 即 } b = \sqrt{3}a \text{ 或 } b = \frac{\sqrt{3}}{3}a;$$

当 $b = \sqrt{3}a$ 时, 由 $\frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$ 得: $a^2 = 1, b^2 = 3, \therefore$ 双曲线 C 的方程为: $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$;

当 $b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ 时, 方程 $\frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$ 无解;

综上所述, 双曲线 C 的方程为: $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由题意得: $F_2(2, 0)$,

假设存在定点 $M(m, 0)$ 满足题意, 则 $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$ 恒成立;

方法一: ①当直线 l 斜率存在时, 设 $l: y = k(x - 2), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{k^2 - 3}, x_1 x_2 = \frac{4k^2 + 3}{k^2 - 3},$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{MA} \cdot \overline{MB} &= (x_1 - m)(x_2 - m) + y_1 y_2 = x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2 + k^2 [x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4] \\ &= (1 + k^2)x_1 x_2 - (2k^2 + m)(x_1 + x_2) + m^2 + 4k^2 = \frac{(4k^2 + 3)(1 + k^2)}{k^2 - 3} - \frac{4k^2(2k^2 + m)}{k^2 - 3} + m^2 + 4k^2 = 0, \\ \therefore (4k^2 + 3)(1 + k^2) - 4k^2(2k^2 + m) + (m^2 + 4k^2)(k^2 - 3) &= 0, \end{aligned}$$

整理可得: $k^2(m^2 - 4m - 5) + (3 - 3m^2) = 0$,

$$\text{由} \begin{cases} m^2 - 4m - 5 = 0, \\ 3 - 3m^2 = 0 \end{cases} \text{得: } m = -1;$$

\therefore 当 $m = -1$ 时, $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$ 恒成立;

②当直线 l 斜率不存在时, $l: x = 2$, 则 $A(2, 3), B(2, -3)$,

当 $M(-1, 0)$ 时, $\overline{MA} = (3, 3), \overline{MB} = (3, -3), \therefore \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$ 成立;

综上所述, 存在 $M(-1, 0)$, 使得以线段 AB 为直径的圆恒过 M 点.

方法二: ①当直线 l 斜率为 0 时, $l: y = 0$, 则 $A(-1, 0), B(1, 0)$,

$$\therefore M(m, 0), \therefore \overline{MA} = (-1 - m, 0), \overline{MB} = (1 - m, 0),$$

$$\therefore \overline{MA} \cdot \overline{MB} = m^2 - 1 = 0, \text{ 解得 } m = \pm 1;$$

②当直线 l 斜率不为 0 时, 设 $l: x = ty + 2, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\text{由} \begin{cases} x = ty + 2, \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{得, } (3t^2 - 1)y^2 + 12ty + 9 = 0, \therefore \begin{cases} 3t^2 - 1 \neq 0, \\ \Delta = 12(3t^2 + 3) > 0, \end{cases}$$

$$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{12t}{3t^2 - 1}, y_1 y_2 = \frac{9}{3t^2 - 1},$$

$$\therefore \overline{MA} \cdot \overline{MB} = (x_1 - m)(x_2 - m) + y_1 y_2 = x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2 + y_1 y_2$$

$$= (ty_1 + 2)(ty_2 + 2) - m(ty_1 + 2 + ty_2 + 2) + m^2 + y_1 y_2 = (t^2 + 1)y_1 y_2 + (2t - mt)(y_1 + y_2) + 4 - 4m + m^2$$

$$= \frac{9(t^2+1)}{3t^2-1} - \frac{12t(2t-mt)}{3t^2-1} + 4 - 4m + m^2 = \frac{(12m-15)t^2+9}{3t^2-1} + (2-m)^2 = 0;$$

当 $\frac{12m-15}{3} = \frac{9}{-1}$, 即 $m = -1$ 时, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ 成立;

综上所述, 存在 $M(-1, 0)$, 使得以线段 AB 为直径的圆恒过 M 点.

21. 【解析】(1) 由已知, ξ 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(\xi=0) = (1-0.6) \cdot (1-a)^2 = 0.4(1-a)^2,$$

$$P(\xi=1) = 0.6(1-a)^2 + (1-0.6) \cdot C_2^1 a(1-a) = 0.2(1-a)(3+a),$$

$$P(\xi=2) = 0.6 \cdot C_2^1 a(1-a) + (1-0.6)a^2 = 0.4a(3-2a)$$

$$P(\xi=3) = 0.6a^2$$

$$\because 0 < a < 0.4, \therefore P(\xi=1) - P(\xi=0) = 0.2(1-a)(1+3a) > 0,$$

$$P(\xi=1) - P(\xi=2) = 0.2(3a^2 - 8a + 3) > 0$$

$$P(\xi=1) - P(\xi=3) = -0.2(4a^2 + 2a - 3) > 0$$

所以概率 $P(\xi=1)$ 最大.

(2) 由 (1) 知, 当 $0 < a < 0.4$ 时, 有 $t_1 = P(\xi=1)$ 的值最大,

且 $t_2 - t_3 = P(\xi=2) - P(\xi=3) = 0.2a(6-7a) > 0, t_1 > t_2 > t_3,$

所以应当以甲、乙、丙的顺序安排出场顺序, 才能使得该代表队出场投篮人数的均值最小. 证明如下:

假设 p_1, p_2, p_3 为 t_1, t_2, t_3 的任意一个排列, 即若甲、乙、丙按照某顺序派出,

该顺序下三个小组能完成项目的概率为 p_1, p_2, p_3 , 记在比赛时所需派出的小组个数为 η , 则 $\eta = 1, 2, 3$, 且 η 的分布列为:

η	1	2	3
P	p_1	$(1-p_1)p_2$	$(1-p_1)(1-p_2)$

数学期望 $E(\eta) = p_1 + 2(1-p_1)p_2 + 3(1-p_1)(1-p_2) = 3 - 2p_1 - p_2 + p_1p_2,$

$$\because t_1 > t_2 > t_3, \therefore p_1 \leq t_1, (1-p_1)(1-p_2) \geq (1-t_1)(1-t_2),$$

$$\therefore 3 - 2p_1 - p_2 + p_1p_2 = 2 + (1-p_1)(1-p_2) - p_1 \geq 2 + (1-t_1)(1-t_2) - t_1 = 3 - 2t_1 - t_2 + t_1t_2,$$

所以应当以甲、乙、丙的顺序安排出场顺序, 才能使得该代表队出场投篮人数的均值最小.

22. 【解析】(1) $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{m}{x},$

因为函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 所以 $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{m}{x} \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

当 $m < 0$ 时, $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{m}{x} \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 满足题意;

当 $m > 0$ 时, 当 $x \in \left(0, \frac{m}{2}\right)$ 时, 由 $\frac{m}{x} > 2$, 故 $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{m}{x} > \cos x - 1 + 2 = \cos x + 1 \geq 0$, 与 $f'(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立矛盾, 所以 m 的取值范围为 $(-\infty, 0)$.

(2) 令 $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{m}{x} = 0$ 得 $m = x - x \cos x$,

令 $g(x) = x - x \cos x$, $x \in (0, 2\pi)$, 则 $g'(x) = 1 - \cos x + x \sin x$,

所以当 $x \in (0, \pi]$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 在 $(0, \pi]$ 上单调递增,

当 $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 时, $g''(x) = 2 \sin x + x \cos x < 0$, 故函数 $g'(x)$ 在 $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

因为 $g'(\pi) = 2 > 0$, $g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - \frac{3\pi}{2} < 0$, 所以存在 $x_1 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 使得 $g'(x_1) = 0$, 即

$$1 - \cos x_1 + x_1 \sin x_1 = 0,$$

所以当 $x \in (\pi, x_1)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 (π, x_1) 上单调递增;

当 $x \in \left(x_1, \frac{3\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $\left(x_1, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递减;

当 $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ 时, $g''(x) = 3 \cos x - x \sin x > 0$ 恒成立,

所以 $g''(x)$ 在 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ 上单调递增,

因为 $g''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2 < 0$, $g''(2\pi) = 2\pi > 0$, 所以存在 $x_2 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, 使得 $g''(x) = 0$,

即 $2 \sin x_2 + x_2 \cos x_2 = 0$, 所以当 $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, x_2\right)$ 时, $g''(x) < 0$, $g'(x)$ 单调递减,

当 $x \in (x_2, 2\pi)$ 时, $g''(x) > 0$, $g'(x)$ 单调递增,

因为 $g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - \frac{3\pi}{2} < 0$, $g'(2\pi) = 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ 上单调递增,

综上, 函数 $g(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递增, 在 $(x_1, 2\pi)$ 上单调递减, 且 $g(0) = g(2\pi) = 0$,

$$g(x_1) = x_1(1 - \cos x_1),$$

因为 $g'(x_1) = 1 - \cos x_1 + x_1 \sin x_1 = 0$, 即 $1 + x_1 \sin x_1 = \cos x_1$, 所以 $g(x_1) = x_1(1 - \cos x_1) = -x_1^2 \sin x_1$,

所以 $0 < g(x) \leq g(x_1) = -x_1^2 \sin x_1$, 其中 $x_1 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$,

所以当 $0 < m < -x_1^2 \sin x_1$ 时, 直线 $y = m$ 与 $y = g(x)$ 的图象在 $(0, 2\pi)$ 上有两个交点,

所以 $f'(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有两个变号零点, 即 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有两个极值点.

所以取 $\alpha = x_1$, 则 $\cos \alpha = 1 + \alpha \sin \alpha$, 当 $0 < m < -\alpha^2 \sin \alpha$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有两个极值点.