湖南省 长沙一中 师大附中 雅礼中学 长郡中学 五月份联考试卷

数 学（理科）试题

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第Ⅰ卷时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第Ⅱ卷时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

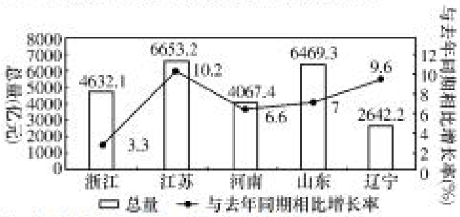
1. 已知 a 为正实数，i 为虚数单位，$\left|\frac{a+i}{i}\right|=2$，则 $a=$

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

2. 已知集合 $A=\left\{x\in \mathbf{Z}\left|\frac{12}{3+x}\in \mathbf{N}\right.\right\}$，$B=\{x|x^2-4x-5\leqslant 0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0,1,3\}$　　B. $\{-1,0,1,2\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

3. 下图是 2017 年第一季度五省 GDP 情况图，则下列陈述中不正确的是



A. 2017 年第一季度 GDP 增速由高到低排位第 5 的是浙江省

B. 与去年同期相比，2017 年第一季度的 GDP 总量五省都实现了增长

C. 去年同期河南省的 GDP 总量不超过 4 000 亿元

D. 2017 年第一季度 GDP 总量和增速由高到低排位均居同一位的省只有 1 个

4. 设 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$，且 $\sqrt{1-\sin 2x}=\sin x-\cos x$，则

A. $0\leqslant x\leqslant \pi$　　B. $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant \frac{7\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant \frac{5\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \frac{3\pi}{2}$

5. 设 x、y、z 是空间中不同的直线或平面，对下列四种情形：①x、y、z 均为直线；②x、y 是直线，z 是平面；③z 是直线，x、y 是平面；④x、y、z 均为平面. 其中使"$x\perp z$ 且 $y\perp z\Rightarrow x/\!/y$"为真命题的是

A. ③④　　B. ①③　　C. ②③　　D. ①②

6. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $g(x)=f(x-1)$，若 $f(2)=2$，则 $f(2\,019)$ 的值为

A. 2　　B. 0　　C. -2　　D. ± 2

7. 若 $\left(3x+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n(n\in \mathbf{N}^*)$ 的展开式中含有常数项，且 n 的最小值为 a，则 $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$

A. 36π　　B. $\frac{81\pi}{2}$　　C. $\frac{25\pi}{2}$　　D. 25π

8. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，定义 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的"向量积"，且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，它的长度 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，若 $\boldsymbol{u}=(2,0)$，$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=(1,-\sqrt{3})$，则 $|\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})|=$

A. $4\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$

C. 6　　D. $2\sqrt{3}$

9. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，以线段 F_1F_2 为直径的圆与双曲线在第二象限的交点为 P，若直线 PF_2 与圆 E：$\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=\frac{b^2}{16}$ 相切，则双曲线的渐近线方程是

A. $y=\pm x$　　B. $y=\pm\sqrt{2}x$

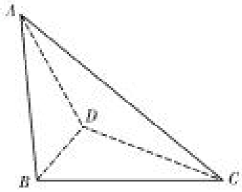
C. $y=\pm\sqrt{3}x$　　D. $y=\pm 2x$

10. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)-1(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的一个零点是 $\frac{\pi}{3}$，函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x=-\frac{\pi}{6}$，则当 ω 取得最小值时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间是

A. $\left[3k\pi-\frac{\pi}{3},3k\pi-\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$　　B. $\left[3k\pi-\frac{5\pi}{3},3k\pi-\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi-\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$　　D. $\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi-\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$

11. 在边长为 $2\sqrt{3}$ 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60°$，沿对角线 BD 折成二面角 A-BD-C 为 120°的四面体 $ABCD$（如右图），则此四面体的外接球表面积为



A. 28π　　B. 7π

C. 14π　　D. 21π

12. 已知函数 $f(x)=(2a+2)\ln x+2ax^2+5$. 设 $a<-1$，若对任意不相等的正数 x_1，x_2，恒有 $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\geqslant 8$，则实数 a 的取值范围是

A. $(-3,-1)$　　B. $(-2,-1)$

C. $(-\infty,-3]$　　D. $(-\infty,-2]$

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22～23 题为选考题，考生根据要求作答.

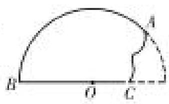
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，把答案填在答题卡中对应题号后的横线上.

13. 设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 3,\\ x-y\geqslant -1,\\ 2x-y\leqslant 3.\end{cases}$ 则目标函数 $z=2x+3y$ 的最小值为________.

14. 齐王与田忌赛马，田忌的上等马优于齐王的中等马，劣于齐王的上等马，田忌的中等马优于齐王的下等马，劣于齐王的中等马，田忌的下等马劣于齐王的下等马. 现从双方的马匹中随机选一匹进行一场比赛，则田忌的马获胜的概率为________.

15. 过抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 且倾斜角为锐角的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，过线段 AB 的中点 N 且垂直于 l 的直线与 C 的准线交于点 M，若 $|MN|=\frac{\sqrt{3}}{3}|AB|$，则 l 的斜率为________.

16. 如图，已知一块半径为 2 的残缺的半圆形材料 ABC，O 为半圆的圆心，$OC=\frac{6}{5}$，残缺部分位于过点 C 的竖直线的右侧，现要在这块材料上裁出一个直角三角形，若该直角三角形一条边在 BC 上，则裁出三角形面积的最大值为________.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

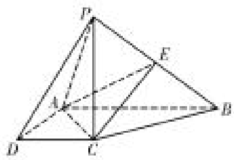
17.（本小题满分 12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_2^2=8a_1+1$，公差 $d>0$，S_1、S_4、S_{16}成等比数列，数列$\{b_n\}$满足 $\log_2 b_n=(a_n-1)\log_2\sqrt{x}$.

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)已知 $c_n=\dfrac{1}{a_n a_{n+1}}$，求数列$\{c_n+b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.（本小题满分 12 分）



如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是直角梯形，$AB\perp AD$，$AB /\!/ CD$，$PC\perp$底面 $ABCD$，$AB=2AD=2CD=4$，$PC=2a$，E 是 PB 的中点.

(1)求证：平面 $EAC\perp$平面 PBC；

(2)若二面角 $P-AC-E$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，求直线 PA 与平面EAC 所成角的正弦值.

19.（本小题满分 12 分）

已知圆 M：$(x+2\sqrt{3})^2+y^2=64$ 及定点 $N(2\sqrt{3},0)$，点 A 是圆 M 上的动点，点 B 在 NA 上，点 G 在 MA 上，且满足$\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NB}$，$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{NA}=0$，点 G 的轨迹为曲线 C.

(1)求曲线 C 的方程；

(2)设斜率为 k 的动直线 l 与曲线 C 有且只有一个公共点，与直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 和$y=-\dfrac{1}{2}x$分别交于 P、Q 两点.

当$|k|>\dfrac{1}{2}$时，求$\triangle OPQ$(O 为坐标原点)面积的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）

超级病菌是一种耐药性细菌，产生超级细菌的主要原因是用于抵抗细菌侵蚀的药物越来越多，但是由于滥用抗生素的现象不断的发生，很多致病菌也对相应的抗生素产生了耐药性，更可怕的是，抗生素药物对它起不到什么作用，病人会因为感染而引起可怕的炎症，高烧、痉挛、昏迷直到最后死亡.

某药物研究所为筛查某种超级细菌，需要检验血液是否为阳性，现有 $n(n\in\mathbf{N}^*)$份血液样本，每个样本取到的可能性均等，有以下两种检验方式：(1)逐份检验，则需要检验 n 次；(2)混合检验，将其中 $k(k\in\mathbf{N}^*$且$k\geqslant 2)$份血液样本分别取样混合在一起检验. 若检验结果为阴性，这 k 份的血液全为阴性，因而这 k 份血液样本只要检验一次就够了，如果检验结果为阳性，为了明确这 k 份血液究竟哪几份为阳性，就要对这 k 份再逐份检验，此时这 k 份血液的检验次数总共为 $k+1$ 次. 假设在接受检验的血液样本中，每份样本的检验结果是阳性还是阴性都是独立的，且每份样本是阳性结果的概率为 $p(0<p<1)$.

(1)假设有5份血液样本,其中只有2份样本为阳性,若采用逐份检验方式,求恰好经过2次检验就能把阳性样本全部检验出来的概率;

(2)现取其中k($k\in\mathbf{N}^*$且$k\geqslant 2$)份血液样本,记采用逐份检验方式,样本需要检验的总次数为ξ_1,采用混合检验方式,样本需要检验的总次数为ξ_2.

(ⅰ)试运用概率统计的知识,若$E\xi_1=E\xi_2$,试求p关于k的函数关系式$p=f(k)$;

(ⅱ)若$p=1-\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$,采用混合检验方式可以使得样本需要检验的总次数的期望值比逐份检验的总次数期望值更少,求k的最大值.

参考数据:$\ln 2\approx 0.6931$,$\ln 3\approx 1.0986$,$\ln 4\approx 1.3863$,$\ln 5\approx 1.6094$,$\ln 6\approx 1.7918$.

21.(本小题满分12分)

记$\max\{m,n\}$表示m,n中的最大值,如$\max\{3,\sqrt{10}\}=\sqrt{10}$.已知函数$f(x)=\max\{x^2-1,2\ln x\}$,$g(x)=\max\left\{x+\ln x,-x^2+\left(a^2-\frac{1}{2}\right)x+2a^2+4a\right\}$.

(1)设$h(x)=f(x)-3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2$,求函数$h(x)$在$(0,1]$上的零点个数;

(2)试探讨是否存在实数$a\in(-2,+\infty)$,使得$g(x)<\frac{3}{2}x+4a$对$x\in(a+2,+\infty)$恒成立?若存在,求a的取值范围;若不存在,说明理由.

请考生在第22~23题中任选一题作答,作答时用2B铅笔在答题卡上把所选题目题号的方框涂黑.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.(本小题满分10分)选修4—4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系xOy中,直线l的参数方程为$\begin{cases}x=2\sqrt{3}+at,\\ y=4+\sqrt{3}t\end{cases}$(其中$t$为参数),以坐标原点$O$为极点,$x$轴的正半轴为极轴的极坐标系中,点$A$的极坐标为$\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$,直线$l$经过点$A$.曲线$C$的极坐标方程为$\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$.

(1)求直线l的普通方程与曲线C的直角坐标方程;

(2)过点$P(\sqrt{3},0)$作直线l的垂线交曲线C于D,E两点(D在x轴上方),求$\frac{1}{|PD|}-\frac{1}{|PE|}$的值.

23.(本小题满分10分)选修4—5:不等式选讲

已知函数$f(x)=|2x-a|+|x-2a+3|$.

(1)当$a=2$时,解关于x的不等式$f(x)\leqslant 9$;

(2)当$a\neq 2$时,若对任意实数x,$f(x)\geqslant 4$都成立,求实数a的取值范围.

参考答案

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	B	A	D	C	C	A	C	D	D	B	A	D

3. D 【解析】解决本题需要从统计图获取信息，解题的关键是明确图表中数据的来源及所表示的意义，依据所代表的实际意义获取正确的信息.

详解：由折线图可知 A、B 正确；4 067.4÷(1+6.6%)≈3 815<4 000，故 C 正确；2017 年第一季度 GDP 总量和增速由高到低排位均居同一位的省有江苏均第一；河南均第四，共 2 个，故 D 错误.

7. C 【解析】$\left(3x+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$展开式的通项为 $T_{r+1}=C_n^r(3x)^{n-r}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^r=3^{n-r}C_n^r x^{n-\frac{5}{2}r}$，$r=0,1,\cdots,n$，因为展开式中含有常数项，所以 $n-\frac{5}{2}r=0$，即 $r=\frac{2}{5}n$ 为整数，故 n 的最小值为 5. 所以 $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-5}^{5}\sqrt{5^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{25\pi}{2}$. 故选 C.

8. D 【解析】由题意 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=(1,\sqrt{3})$，则 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(3,\sqrt{3})$，$\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $\sin\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle=\frac{1}{2}$，由定义知 $|\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})|=|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|\sin\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle=2\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$，故选 D.

9. D 【解析】设切点为 M，则 $EM/\!/PF_1$，又 $\frac{F_2E}{F_2F_1}=\frac{1}{4}$，所以 $|PF_1|=4r=b$，所以 $|PF_2|=2a+b$，因此 $b^2+(2a+b)^2=4c^2$，所以 $b=2a$，所以渐近线方程为 $y=\pm2x$.

10. B 【解析】依题意得，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{\pi\omega}{3}+\varphi\right)-1=0$，即 $\sin\left(\frac{\pi\omega}{3}+\varphi\right)=\frac{1}{2}$，

解得 $\frac{\pi\omega}{3}+\varphi=2k_1\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi\omega}{3}+\varphi=2k_2\pi+\frac{5\pi}{6}$（其中 $k_1,k_2\in\mathbf{Z}$）. ①

又 $\sin\left(-\frac{\pi\omega}{6}+\varphi\right)=\pm1$，

即 $-\frac{\pi\omega}{6}+\varphi=k_3\pi+\frac{\pi}{2}$（其中 $k_3\in\mathbf{Z}$）. ②

由①－②得 $\frac{\pi\omega}{2}=(2k_1-k_3)\pi-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi\omega}{2}=(2k_2-k_3)\pi+\frac{\pi}{3}$，

即 $\omega=2(2k_1-k_3)-\frac{2}{3}$ 或 $\omega=2(2k_2-k_3)+\frac{2}{3}$（其中 $k_1,k_2,k_3\in\mathbf{Z}$），因此 ω 的最小值为 $\frac{2}{3}$.

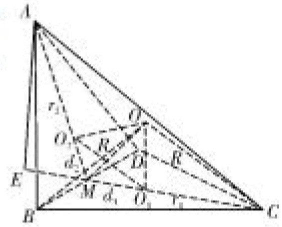
因为 $\sin\left(-\frac{\pi\omega}{6}+\varphi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{9}+\varphi\right)=\pm1$，所以 $-\frac{\pi}{9}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{9}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{9}\right)-1=2\cos\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{9}\right)-1$，

令 $2k\pi-\pi\leqslant\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{9}\leqslant2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $3k\pi-\frac{5\pi}{3}\leqslant x\leqslant3k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

因此，当 ω 取得最小值时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[3k\pi-\frac{5\pi}{3},3k\pi-\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$.

11. A 【解析】如图，取 BD 的中点 M，$\triangle CBD$ 和 $\triangle ABD$ 的外接圆半径为 $r_1=r_2=2$，$\triangle CBD$ 和 $\triangle ABD$ 的外心 O_1,O_2 到弦 BD 的距离（弦心距）为 $d_1=d_2=1$.



法一：四边形 OO_1MO_2 的外接圆直径 $OM=2$，$R=\sqrt{7}$，

$S=28\pi$；

法二：$OO_1=\sqrt{3}$，$R=\sqrt{7}$，$S=28\pi$；

法三：作出 $\triangle CBD$ 的外接圆直径 CE，则 $AM=CM=3$，$CE=4$，$ME=1$，

$AE=\sqrt{7}$，$AC=3\sqrt{3}$，$\cos\angle AEC=\frac{7+16-27}{2\cdot\sqrt{7}\cdot4}=-\frac{1}{2\sqrt{7}}$，

$\sin\angle AEC=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$，$2R=\frac{AC}{\sin\angle AEC}=\frac{3\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}}=2\sqrt{7}$，$R=\sqrt{7}$，$S=28\pi$.

12. D 【解析】$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2a+2}{x}+4ax=\frac{2(2ax^2+a+1)}{x}$，

当 $a<-1$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；

不妨设 $x_1<x_2$，而 $a<-1$，知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

从而对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，恒有 $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\geqslant8$，

即 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant8|x_1-x_2|$，

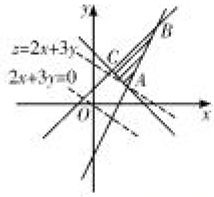
$f(x_1)-f(x_2)\geqslant8(x_2-x_1)$，$f(x_1)+8x_1\geqslant f(x_2)+8x_2$，

令 $g(x)=f(x)+8x$，则 $g'(x)=\frac{2a+2}{x}+4ax+8$，原不等式等价于 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，即 $\frac{a+1}{x}+2ax+4\leqslant0$，

从而 $a\leqslant\frac{-4x-1}{2x^2+1}=\frac{(2x-1)^2}{2x^2+1}-2$，

故 a 的取值范围为 $(-\infty,-2]$.

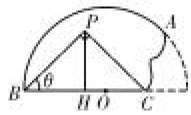
二、填空题



13.7 【解析】作出可行域如图所示，由图可知，$z=2x+3y$ 经过点 $A(2,1)$ 时，z 有最小值，z 的最小值为 7.

14. $\frac{1}{3}$ 【解析】设齐王的上、中、下三匹马分别记为 a_1, a_2, a_3，田忌的上、中、下三匹马分别记为 b_1, b_2, b_3，齐王与田忌赛马，其情况有：(a_1, b_1)、(a_1, b_2)、(a_1, b_3)、(a_2, b_1)、(a_2, b_2)、(a_2, b_3)、(a_3, b_1)、(a_3, b_2)、(a_3, b_3)，共 9 种；其中田忌的马获胜的有 (a_2, b_1)、(a_3, b_1)、(a_3, b_2) 共 3 种，则田忌获胜的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

15. $\sqrt{3}$ 【解析】分别过 A, B, N 作抛物线的准线的垂线，垂足分别为 A', B', N'，由抛物线的定义知 $|AF|=|AA'|$，$|BF|=|BB'|$，$|NN'|=\frac{1}{2}(|AA'|+|BB'|)=\frac{1}{2}|AB|$，因为 $|MN|=\frac{\sqrt{3}}{3}|AB|$，所以 $|NN'|=\frac{\sqrt{3}}{2}|MN|$，所以 $\angle MNN'=30°$，即直线 MN 的倾斜角为 $150°$，又直线 MN 与直线 l 垂直且直线 l 的倾斜角为锐角，所以直线 l 的倾斜角为 $60°$，$k_{AB}=\sqrt{3}$.



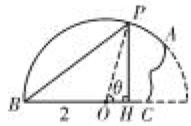
16. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 【解析】(1) 斜边在 BC 上，设 $\angle PBC=\theta$，则 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $PB=\frac{16}{5}\cos\theta$，$PC=\frac{16}{5}\sin\theta$，

从而 $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{5}\cos\theta\cdot\frac{16}{5}\sin\theta=\frac{64}{25}\sin 2\theta\leqslant\frac{64}{25}$.

当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$S_{\max}=\frac{64}{25}$，此时 $PH=\frac{8}{5}$，符合.

(2) 若一条直角边在 BC 上，设 $\angle POH=\theta$，则 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，



则 $PH=2\sin\theta$，$OH=2\cos\theta$，

由 $OH\leqslant OC=\frac{6}{5}$ 知 $\cos\theta\leqslant\frac{3}{5}$.

$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}(2+2\cos\theta)\cdot 2\sin\theta=2\sin\theta(1+\cos\theta)$，

$S'(\theta)=2(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$，

当 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时，$S'(\theta)>0$，$S(\theta)$ 单调递增，

当 $\theta\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$S'(\theta)<0$，$S(\theta)$ 单调递减，

$\therefore S(\theta)\leqslant S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}>\frac{64}{25}$.

当 $\theta=\frac{\pi}{3}$，即 $\cos\theta=\frac{1}{2}$时，$S(\theta)$最大.

综上，$S_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

三、解答题

17.【解析】(1)由题意知 $S_1=a_1$，$S_4=4a_1+6d$，$S_{16}=16a_1+120d$，

由 $S_4^2=S_1\cdot S_{16}$得

$(4a_1+6d)^2=a_1(16a_1+120d)$，

解得 $d=2a_1>0$. ………… 2分

又 $a_2^2=(a_1+d)^2=8a_1+1$，得 $9a_1^2=8a_1+1$，

解得 $a_1=1$ 或 $a_1=-\frac{1}{9}$(舍).

$\therefore d=2$，$a_n=2n-1$. ………… 4分

又 $\log_2 b_n=(2n-2)\log_2\sqrt{x}=\log_2 x^{n-1}(x>0)$，

$\therefore b_n=x^{n-1}(x>0)$. ………… 6分

(2)$c_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$， ………… 7分

①当 $x=1$ 时，

$T_n=(c_1+c_2+\cdots+c_n)+(b_1+\cdots+b_n)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)+n$. ………… 9分

②当 $x\neq1$ 时，

$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{1-x^n}{1-x}$. ………… 12分

18.【解析】(1)$\because PC\perp$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，$\therefore AC\perp PC$. ………… 1分

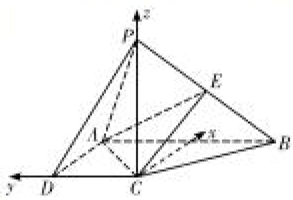
$\because AB=4$，$AD=CD=2$，$\therefore AC=BC=2\sqrt{2}$.

$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$，$\therefore AC\perp BC$. ………… 3分

又 $BC\cap PC=C$，$\therefore AC\perp$平面 PBC.

$\because AC\subset$平面 EAC，$\therefore$平面 $EAC\perp$平面 PBC. ………… 4分

(2)如图，以点 C 为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CP}$分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立空间直角坐标系，则 $C(0,0,0)$，$A(2,2,0)$，$B(2,-2,0)$.



设 $P(0,0,2a)(a>0)$，则 $E(1,-1,a)$，

$\overrightarrow{CA}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,0,2a)$，$\overrightarrow{CE}=(1,-1,a)$， ………… 6分

取 $m=(1,-1,0)$，则 $m\cdot\overrightarrow{CA}=m\cdot\overrightarrow{CP}=0$，$m$ 为面 PAC 的法向量.

设 $n=(x,y,z)$ 为面 EAC 的法向量，则 $n\cdot\overrightarrow{CA}=n\cdot\overrightarrow{CE}=0$，

即 $\begin{cases}x+y=0,\\x-y+az=0\end{cases}$ 取 $x=a$，$y=-a$，$z=-2$，则 $n=(a,-a,-2)$，

依题意 $|\cos\langle m,n\rangle|=\dfrac{|m\cdot n|}{|m|\cdot|n|}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，则 $a=2$. …………………………… 10 分

于是 $n=(2,-2,-2)$，$\overrightarrow{PA}=(2,2,-4)$.

设直线 PA 与平面 EAC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PA},n\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot n|}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|n|}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

即直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. …………………………………………… 12 分

19.【解析】(1) $\begin{cases}\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NB}\\\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{NA}=0\end{cases}\Rightarrow B$ 为 AN 的中点，且 $GB\perp AN\Rightarrow GB$ 是线段 AN 的中垂线，

$\therefore |AG|=|GN|$，又 $|GM|+|GN|=|GM|+|GA|=|AM|=8>4\sqrt{3}=|MN|$，

$\therefore$ 点 G 的轨迹是以 M，N 为焦点的椭圆， …………………………………………………… 2 分

设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

则 $a=4$，$c=2\sqrt{3}$，$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=2$，

所以曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………… 4 分

(2) 设直线 $l: y=kx+m\left(k\neq\pm\dfrac{1}{2}\right)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m\\x^2+4y^2=16\end{cases}$ 消去 y，可得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-16=0$.

因为直线 l 总与椭圆 C 有且只有一个公共点，

所以 $\Delta=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2-16)=0$，即 $m^2=16k^2+4$. ① ……………………… 6 分

又由 $\begin{cases}y=kx+m\\x-2y=0\end{cases}$ 可得 $P\left(\dfrac{2m}{1-2k},\dfrac{m}{1-2k}\right)$；同理可得 $Q\left(\dfrac{-2m}{1+2k},\dfrac{m}{1+2k}\right)$. …………………… 8 分

由原点 O 到直线 PQ 的距离为 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$ 和 $|PQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x_P-x_Q|$，

可得 $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot d=\dfrac{1}{2}|m||x_P-x_Q|=\dfrac{1}{2}\cdot|m|\left|\dfrac{2m}{1-2k}+\dfrac{2m}{1+2k}\right|=\left|\dfrac{2m^2}{1-4k^2}\right|$. ② ……………………………………………………………………………………………… 10 分

将①代入②得，$S_{\triangle OPQ}=\left|\frac{2m^2}{1-4k^2}\right|=8\left|\frac{4k^2+1}{4k^2-1}\right|$.

当 $k^2>\frac{1}{4}$ 时，$S_{\triangle OPQ}=8\left(\frac{4k^2+1}{4k^2-1}\right)=8\left(1+\frac{2}{4k^2-1}\right)>8$，

综上，$\triangle OPQ$ 面积的取值范围是 $(8,+\infty)$. ………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)设恰好经过 2 次检验能把阳性样本全部检验出来为事件 A，

则 $P(A)=\frac{A_2^2A_3^3}{A_5^5}=\frac{1}{10}$，

∴恰好经过 2 次检验就能把阳性样本全部检验出来的概率为 $\frac{1}{10}$. ……………………… 4 分

(2)(ⅰ)由已知得 $E\xi_1=k$，ξ_2 的所有可能取值为 $1,k+1$.

$\therefore P(\xi_2=1)=(1-p)^k$，$P(\xi_2=k+1)=1-(1-p)^k$，

$\therefore E\xi_2=(1-p)^k+(k+1)[1-(1-p)^k]=k+1-k(1-p)^k$，……………………………… 6 分

若 $E\xi_1=E\xi_2$，则 $k=k+1-k(1-p)^k$，$\therefore k(1-p)^k=1$，$(1-p)^k=\frac{1}{k}$，$\therefore 1-p=\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$，$\therefore p=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$.

$\therefore p$ 关于 k 的函数关系式为 $p=f(k)=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$（$k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k\geqslant 2$）. …………………… 8 分

(ⅱ)由题意可知 $E\xi_2<E\xi_1$，得 $\frac{1}{k}<(1-p)^k$，

$\because p=1-\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$，$\therefore \frac{1}{k}<\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)^k$，$\therefore \ln k>\frac{1}{3}k$，……………………………………………… 10 分

设 $f(x)=\ln x-\frac{1}{3}x\ (x>0)$，

$\therefore$ 当 $x>3$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递减，

又 $\ln 4\approx 1.3863$，$\frac{4}{3}\approx 1.3333$，$\therefore \ln 4>\frac{4}{3}$，$\ln 5\approx 1.6094$，$\frac{5}{3}\approx 1.6667$，$\therefore \ln 5<\frac{5}{3}$.

所以 k 的最大值为 4. ……………………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)设 $F(x)=x^2-1-2\ln x$，则 $F'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

当 $x>1$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增；当 $0<x<1$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减；

所以 $F(x)_{\min}=F(1)=0$，所以 $F(x)\geqslant 0$，即 $x^2-1\geqslant 2\ln x$，所以 $f(x)=x^2-1$. ……… 3 分

设 $G(x)=3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2$，结合 $f(x)$ 与 $G(x)$ 在 $(0,1]$ 上的图象（图略）可知，这两个函数的图象在 $(0,1]$ 内有两个交点，

即 $h(x)$ 在 $(0,1]$ 上的零点个数为 2(或由方程 $f(x)=G(x)$ 在 $(0,1]$ 内有两根可得). ………………………………………………………………………………… 6 分

(2)假设存在实数 $a\in(-2,+\infty)$,使得 $g(x)<\frac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立,

则 $\begin{cases}x+\ln x<\frac{3}{2}x+4a,\\ -x^2+\left(a^2-\frac{1}{2}\right)x+2a^2+4a<\frac{3}{2}x+4a,\end{cases}$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立,

即 $\begin{cases}\ln x-\frac{1}{2}x<4a,\\ (x+2)(x-a^2)>0,\end{cases}$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立, ………………………………… 7 分

①设 $H(x)=\ln x-\frac{1}{2}x$,则 $H'(x)=\frac{2-x}{2x}$,

当 $0<x<2$ 时,$H'(x)>0$,$H(x)$ 单调递增;当 $x>2$ 时,$H'(x)<0$,$H(x)$ 单调递减.

所以 $H(x)_{\max}=H(2)=\ln 2-1$,

当 $0<a+2<2$ 即 $-2<a<0$ 时,$4a>\ln 2-1$,所以 $a>\frac{\ln 2-1}{4}$,因为 $a<0$,所以 $a\in\left(\frac{\ln 2-1}{4},0\right)$.

故当 $a\in\left(\frac{\ln 2-1}{4},0\right)$ 时,$\ln x-\frac{1}{2}x<4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立;

当 $a+2\geqslant 2$,即 $a\geqslant 0$ 时,$H(x)$ 在 $(a+2,+\infty)$ 上递减,

所以 $H(x)<H(a+2)=\ln(a+2)-\frac{1}{2}a-1$.

因为 $\left[\ln(a+2)-\frac{1}{2}a-1\right]'=\frac{1}{a+2}-\frac{1}{2}\leqslant 0$,所以 $H(a+2)\leqslant H(2)=\ln 2-1<0$,

故当 $a\geqslant 0$ 时,$\ln x-\frac{1}{2}x<4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立. ………………………… 10 分

②若 $(x+2)(x-a^2)>0$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立,

则 $a+2\geqslant a^2$,

所以 $a\in[-1,2]$. ………………………………………………………………………… 11 分

由①②得,$a\in\left(\frac{\ln 2-1}{4},2\right]$.

故存在实数 $a\in(-2,+\infty)$,使得 $g(x)<\frac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立,且 a 的取值范围为 $\left(\frac{\ln 2-1}{4},2\right]$. ………………………………………………………… 12 分

理科数学参考答案 — 7

22.【解析】(1)由题意得点 A 的直角坐标为 $(\sqrt{3},1)$，将点 A 代入 $\begin{cases}x=2\sqrt{3}+at,\\y=4+\sqrt{3}t\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=1,\\t=-\sqrt{3},\end{cases}$

则直线 l 的普通方程为 $y=\sqrt{3}x-2$. …………………………………………………… 2 分

由 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$ 得 $\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta$，即 $y^2=4x$. 故曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=4x$. ……………………………………………………………………………… 4 分

(2)设直线 DE 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\\y=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)，

代入 $y^2=4x$ 得 $t^2+8\sqrt{3}t-16\sqrt{3}=0$. 设 D 对应参数为 t_1，E 对应参数为 t_2. ………… 6 分

则 $t_1+t_2=-8\sqrt{3}$，$t_1t_2=-16\sqrt{3}$，且 $t_1>0$，$t_2<0$. …………………………………… 8 分

$\therefore \dfrac{1}{|PD|}-\dfrac{1}{|PE|}=\dfrac{1}{|t_1|}-\dfrac{1}{|t_2|}=\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}=\dfrac{t_1+t_2}{t_1t_2}=\dfrac{1}{2}$. ………………………………… 10 分

23.【解析】(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=3|x-1|$，

由 $f(x)\leqslant 9$ 得 $|x-1|\leqslant 3$，由 $|x-1|\leqslant 3$ 得 $-3\leqslant x-1\leqslant 3$，解得：$-2\leqslant x\leqslant 4$，

故 $a=2$ 时，关于 x 的不等式的解集是 $\{x\in\mathbf{R}\mid -2\leqslant x\leqslant 4\}$. ………………………… 4 分

(2)①当 $a>2$ 时，$\dfrac{a}{2}<2a-3$，$f(x)=\begin{cases}3x-3a+3, & x>2a-3,\\x+a-3, & \dfrac{a}{2}\leqslant x\leqslant 2a-3,\\-3x+3a-3, & x<\dfrac{a}{2},\end{cases}$

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{a}{2}\right)$ 递减，在 $\left(\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 递增，故 $f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{3a}{2}-3$，

由题设得 $\dfrac{3a}{2}-3\geqslant 4$，解得：$a\geqslant\dfrac{14}{3}$. …………………………………………………… 7 分

②当 $a<2$ 时，$\dfrac{a}{2}>2a-3$，$f(x)=\begin{cases}3x-3a+3, & x>\dfrac{a}{2},\\-x-a+3, & 2a-3\leqslant x\leqslant\dfrac{a}{2},\\-3x+3a-3, & x<2a-3,\end{cases}$

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{a}{2}\right)$ 递减，在 $\left(\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 递增，故 $f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{3a}{2}+3$，

由题设得 $-\dfrac{3a}{2}+3\geqslant 4$，解得：$a\leqslant -\dfrac{2}{3}$，

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{14}{3},+\infty\right)$. ………………………………… 10 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：zizzsw。

微信扫一扫，快速关注