

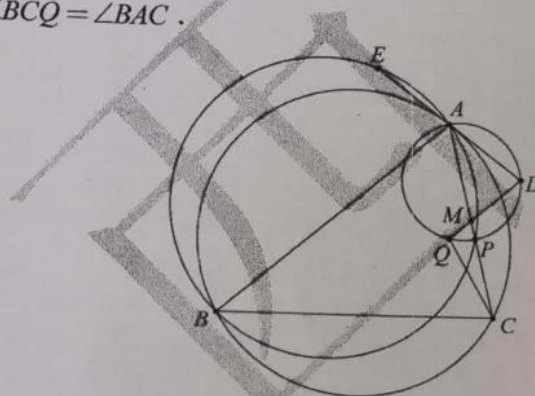
2021 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（初赛）
暨 2021 年全国高中数学联合竞赛
加试试题（A 卷）

一.（本题满分 40 分）给定正整数 $k(k \geq 2)$ 与 k 个非零实数 a_1, a_2, \dots, a_k . 证明：至多有有限个 k 元正整数组 (n_1, n_2, \dots, n_k) , 满足 n_1, n_2, \dots, n_k 互不相同, 且

$$a_1 \cdot n_1! + a_2 \cdot n_2! + \dots + a_k \cdot n_k! = 0.$$

二.（本题满分 40 分）如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, M 是边 AC 的中点, D, E 是 $\triangle ABC$ 的外接圆在点 A 处的切线上的两点, 满足 $MD \parallel AB$, 且 A 是线段 DE 的中点, 过 A, B, E 三点的圆与边 AC 相交于另一点 P , 过 A, D, P 三点的圆与 DM 的延长线相交于点 Q . 证明: $\angle BCQ = \angle BAC$.

（答题时请将图画在答卷纸上）



三.（本题满分 50 分）设整数 $n \geq 4$. 证明：若 n 整除 $2^n - 2$, 则 $\frac{2^n - 2}{n}$ 是合数.

四.（本题满分 50 分）求具有下述性质的最小正数 c : 对任意整数 $n \geq 4$, 以及集合 $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, 若 $|A| > cn$, 则存在函数 $f: A \rightarrow \{1, -1\}$, 满足

$$\left| \sum_{a \in A} f(a) \cdot a \right| \leq 1.$$

2021 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（初赛）
暨 2021 年全国高中数学联合竞赛
一试试题（A 卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分。

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{2021} = a_{20} + a_{21} = 1$ ，则 a_1 的值为_____.
2. 设集合 $A = \{1, 2, m\}$ ，其中 m 为实数. 令 $B = \{a^2 \mid a \in A\}$ ， $C = A \cup B$. 若 C 的所有元素之和为 6，则 C 的所有元素之积为_____.
3. 设函数 $f(x)$ 满足：对任意非零实数 x ，均有 $f(x) = f(1) \cdot x + \frac{f(2)}{x} - 1$ ，则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为_____.
4. 设函数 $f(x) = \cos x + \log_2 x (x > 0)$ ，若正实数 a 满足 $f(a) = f(2a)$ ，则 $f(2a) - f(4a)$ 的值为_____.
5. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 1$ ， $AC = 2$ ， $B - C = \frac{2\pi}{3}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.
6. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，过 Γ 上一点 P （异于 O ）作 Γ 的切线，与 y 轴交于点 Q . 若 $|FP| = 2$ ， $|FQ| = 1$ ，则向量 \overrightarrow{OP} 与 \overrightarrow{OQ} 的数量积为_____.
7. 一颗质地均匀的正方体骰子，六个面上分别标有点数 1, 2, 3, 4, 5, 6. 随机地抛掷该骰子三次（各次抛掷结果相互独立），所得的点数依次为 a_1, a_2, a_3 ，则事件 “ $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_1| = 6$ ” 发生的概率为_____.
8. 设有理数 $r = \frac{p}{q} \in (0, 1)$ ，其中 p, q 为互素的正整数，且 pq 整除 3600. 这样的有理数 r 的个数为_____.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分 16 分) 已知复数列 $\{z_n\}$ 满足：

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, z_{n+1} = \overline{z_n}(1 + z_n i) (n = 1, 2, \dots),$$

其中 i 为虚数单位. 求 z_{2021} 的值.

10. (本题满分 20 分) 在平面直角坐标系中，函数 $y = \frac{x+1}{|x|+1}$ 的图像上有三个不同的点位于直线 l 上，且这三点的横坐标之和为 0. 求 l 的斜率的取值范围.

11. (本题满分 20 分) 如图，正方体 $ABCD - EFGH$ 的棱长为 2，在正方形 $ABFE$ 的内切圆上任取一点 P_1 ，在正方形 $BCGF$ 的内切圆上任取一点 P_2 ，在正方形 $EFGH$ 的内切圆上任取一点 P_3 . 求 $|P_1P_2| + |P_2P_3| + |P_3P_1|$ 的最小值与最大值.

