

2023 年普通高等学校招生全国统一考试模拟试卷（一）

数 学 答 案

一、选择题

1. B 2. D 3. C 4. B
5. D 6. C 7. D 8. A

二、选择题

9. AC 10. AD 11. ABC 12. ACD

三、填空题

13. 甲 14. 25 15. 4 16. 52π

【解析】

1. B

【详解】因为 $M = \{a, 0\}, N = \{a^2, b\}$, $M = N$

所以 $\begin{cases} a = a^2 \\ b = 0 \\ a^2 \neq b \\ a \neq 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$, 所以 $a + b = 1$. 故选: B.

2. D

【详解】因为在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$, 所以点 B 为 AD 中点, 所以 $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = 2\vec{a} - \vec{b}$,

故选: D

3. C

【详解】设 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$ 且 $b \neq 0$), 代入原方程可得 $a^2 - b^2 - 2a + m + (2ab - 2b)i = 0$.

所以 $\begin{cases} a^2 - b^2 - 2a + m = 0 \\ 2ab - 2b = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} -b^2 - 1 + m = 0 \\ a = 1 \end{cases}$, 因为 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, 所以 $b^2 = 1, m = 2$.

故选: C.

4. B

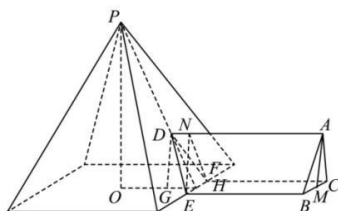
【详解】设 O 为正四棱锥底面中心, 连接 PO, OH, 则 $PH = 3\sqrt{3}, OH = 3$,

$\therefore PO = \sqrt{PH^2 - OH^2} = 3\sqrt{2}$, $\therefore \tan \angle PHO = \frac{OP}{OH} = \sqrt{2}$,

取 BC 的中点 M, 连接 AM, 过 D 作 $DG \perp OH$ 于 G, 则 $DG = AM = 2$.

在直角 $\triangle DGH$ 中 $GH = \frac{DG}{\tan \angle PHO} = \sqrt{2}$.

过 E 作 $EN \parallel AB$ 交 AD 于 N, 连接 NF.



则 $AN = AD - DN = 2\sqrt{2}$,

所求体积 $V = V_{\text{四棱锥}} + V_{ABC-NEF} + V_{D-NEF}$

$$= \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 3\sqrt{2} + \frac{1}{2} (2\sqrt{2})^2 \times 2\sqrt{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} = \frac{136}{3} \sqrt{2} m^3$$

故选: B

5. D

【详解】由题意可得 $\left(\frac{a}{x} + y\right)(x-2y)^5 = \frac{a}{x}(x-2y)^5 + y(x-2y)^5$,

在 $\frac{a}{x}(x-2y)^5$ 的展开式中, 由 $ax^{-1}C_5^r x^{5-r} (-2y)^r = a(-2)^r C_5^r x^{4-r} y^r$.

令 $\begin{cases} 4-r=2 \\ r=2 \end{cases}$ 解得 $r=2$, 即 $\frac{a}{x}(x-2y)^5$ 的展开式中 x^2y^2 的项的系数为 $a(-2)^2 C_5^2 = 40a$,

在 $y(x-2y)^5$ 的展开式中, 由 $yC_5^r x^{5-r} (-2y)^r = (-2)^r C_5^r x^{5-r} y^{r+1}$,

令 $\begin{cases} 5-r=2 \\ r+1=2 \end{cases}$ 无解, 即 $y(x-2y)^5$ 的展开式中没有 x^2y^2 项;

又 x^2y^2 的系数为 80, 所以 $40a = 80$, 解得 $a = 2$. 故选: D

6. C

【详解】不妨设点 A 为曲线 C_1 与 C_2 在 y 轴上的交点,

如图, 设点 D 为 AC 的中点, 连接 BD, BC.

$$\text{则 } |AD| = \frac{T}{2} = 1, \quad |BD| = 2|OA| = 2a \sin(0 + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}a.$$

因为 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 所以 $|AD| = |BD|$, 所以 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

故选: C.

7. D

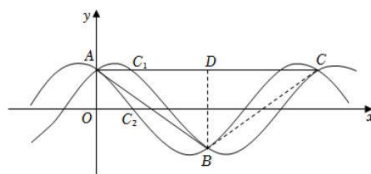
【详解】设 $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, $D(-x_1, -y_1)$,

$$\therefore \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad \text{相减整理得 } \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{y_0 + y_1}{x_0 + x_1} = -\frac{b^2}{a^2},$$

$$\text{即 } k_{AB} \cdot k_{AD} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{4}, \quad \tan \alpha \cdot \tan \beta = -\frac{1}{4}.$$

$$\therefore \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} = \frac{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = -\frac{3}{10}, \therefore -\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha - \beta}{2} < \frac{\pi}{2}, \therefore \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha - \beta)}{2}} = \frac{\sqrt{35}}{10}, \text{ 故选: D}$$



8. A

【详解】 $c-a=2\ln\left(\frac{1}{10}+1\right)-\sqrt{1+4\times\frac{1}{10}}+1$, 令 $f(x)=2\ln(x+1)-\sqrt{1+4x}+1$,

则 $f'(x)=\frac{2}{1+x}-\frac{2}{\sqrt{1+4x}}=\frac{2(\sqrt{1+4x}-x-1)}{(x+1)\sqrt{1+4x}}$, $\therefore f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增,

$\therefore f(0.1)>f(0)=0$, $\therefore 2\ln 1.1>\sqrt{1.4}-1$, 即 $c>a$

又 $\because b-c=2\left(\sin\frac{1}{10}-\ln\frac{11}{10}\right)=2\left[\sin\frac{1}{10}-\ln\left(\frac{1}{10}+1\right)\right]$

令 $g(x)=\sin x-\ln(x+1)$, $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$, 则 $h(x)=g'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$, $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$,

$h'(x)=-\sin x+\frac{1}{(x+1)^2}$, 在 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 上单调递减,

当 $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 时, $\sin x\in\left(0,\sin\frac{1}{3}\right)$, $\frac{1}{(x+1)^2}\in\left(\frac{9}{16},1\right)$,

$\because \frac{9}{16}>\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}>\sin\frac{1}{3}$, $\therefore$ 当 $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 时, $h'(x)=-\sin x+\frac{1}{(x+1)^2}>0$,

$\therefore h(x)=g'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 上单调递增,

$\therefore$ 当 $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 时, $g'(x)>g'(0)=0$, $\therefore g(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 上单调递增,

$\therefore g\left(\frac{1}{10}\right)=\sin\frac{1}{10}-\ln\frac{11}{10}>g(0)=0$, 即 $b-c>0$, $\therefore b>c$, 综上, 有 $a<c<b$.

故选: A.

二、多项选择题 (共 4 小题, 每小题 5 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. AC

【详解】对于 A 选项, $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=x_0$, $\therefore x_1+x_2+\cdots+x_n=nx_0$,

$\frac{x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n}{n+1}=\frac{x_0+nx_0}{n+1}=x_0$, 平均数不变, 所以 A 选项正确;

$$s_0^2=\frac{1}{n}\left[(x_1-x_0)^2+(x_2-x_0)^2+\cdots+(x_n-x_0)^2\right],$$

$$s^2=\frac{1}{n+1}\left[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2+(x_0-\bar{x})^2\right]=\frac{1}{n+1}\left[(x_1-x_0)^2+(x_2-x_0)^2+\cdots+(x_n-x_0)^2+(x_0-x_0)^2\right],$$

所以 $s_0^2>s^2$, 故 B 错误, C 正确;

对于 D 选项, 由于原数据的中位数与平均数的大小关系不确定,

所以不能比较新数据与原数据的中位数的大小, 故 D 错误. 故选: AC

10. AD

【详解】点 P 到平面 MNC 的距离为 a 为定值,

$$\text{又 } S_{\triangle MNC} = a^2 - \frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a = \frac{3}{8}a^2,$$

所以 $V_{M-PNC} = V_{P-MNC} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8}a^2 \times a = \frac{1}{8}a^3$, 即三棱锥 $M-PNC$ 的体积为定值, 故 A 正确;

设 CD 中点为 Q , 连接 MQ, PQ , 则 $\angle PMQ$ 即为异面直线 BC 与 MP 所成的角

$$\text{在 } Rt\triangle PMQ \text{ 中, } \cos \angle PMQ = \frac{MQ}{PM} = \frac{a}{PM} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以异面直线 BC 与 MP 所成的最小角为 45° , 故 B 不正确;

若 P 为 C_1D_1 中点, 则 $PQ \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PQ \perp MN$, 又 $MN \perp NQ$, $PQ \cap NQ = Q$, 所以 $MN \perp$ 平面 NPQ , $NP \subset$ 平面 NPQ , 所以 $MN \perp NP$, 故 C 不正确;

取 DD_1 的中点 E , B_1C_1 的中点 F , BB_1 的中点 G , 连接 NE 、 EP 、 PF 、 FG 、 GM ,

所以过 M 、 N 、 P 三点的平面截正方体所得截面为正六边形, 面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, 故 D 正确.

故选: AD .

11. ABC

【详解】对于 A , 由抛物线的定义的, $PF = PM = PN$, 所以 $MF \perp FN$, 故 A 正确.

因为 $P(x_0, y_0)$, 则 $M\left(-\frac{1}{4}, y_0\right)$, $N\left(2x_0 + \frac{1}{4}, y_0\right)$,

点 P 处的切线斜率 $k_{PT} = \frac{1}{2y_0}$, 而 $k_{NF} = \frac{y_0}{2x_0} = \frac{y_0}{2y_0^2} = \frac{1}{2y_0}$, 所以 $k_{PT} = k_{NF}$,

从而 $PT \parallel NF$, 又 P 是线段 MN 中点, 所以 T 是线段 MQ 的中点, 又 $\angle MFN = 90^\circ$,

所以 $TF = TQ = TM$, 所以 $\triangle FTQ$ 是等腰三角形, 故 B 正确.

因为 $PT \parallel NF$, 所以 $\angle MPT = \angle PNF = \angle PFN = \angle FPT$, 所以 PT 平分 $\angle FPM$, 故选项 C 正确;

直线 FN 的方程为 $y = \frac{1}{2y_0}\left(x - \frac{1}{4}\right)$, 令 $x = -\frac{1}{4}$, 得 $Q\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4y_0}\right)$,

所以 $|MQ| = \left|y_0 - \frac{-1}{4y_0}\right| = |y_0| + \frac{1}{4|y_0|} \geq 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$, 当且仅当 $|y_0| = \frac{1}{2}$ 时, $|MQ|$ 最小值为 1, 故 D 错误. 故选: ABC .

12. ACD

【详解】因为 $f(x)$ 定义在 $(-1, 1)$ 上, 且满足 $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ 恒成立,

令 $x = y = 0$, 解得 $f(0) = 0$, 故 A 正确;

再令 $y = -x$ ，则 $f(-x) + f(x) = f(0) = 0$ ，故 $f(-x) = -f(x)$ ，故 $f(x)$ 是奇函数，故 B 错误；

任取 $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则 $f(x_2) - f(x_1) = f(\frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2})$ 。

因为 $(1 + x_1)(1 - x_2) = 1 - x_2 + x_1 - x_1 x_2 > 0$ ，所以 $x_2 - x_1 < 1 - x_1 x_2$ ，所以 $0 < \frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2} < 1$ 。

因为 $x \in (0, 1)$ ， $f(x) > 0$ ，所以 $f(\frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2}) > 0$ ， $f(x_1) < f(x_2)$ ，

即 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递增。故 C 正确；

对于 D ，因为 $x_n > 0$ ， $x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n^2 + 1} \in (0, 1)$ 。令 $y = x$ ，则 $2f(x) = f(\frac{2x}{1 + x^2})$ 。

令 $x = x_n$ ，则 $2f(x_n) = f(\frac{2x_n}{1 + x_n^2}) = f(x_{n+1})$ ，所以 $\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = 2$ 。因为 $f(x_1) = 1$ ，

所以 $\{f(x_n)\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，所以 $f(x_n) = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$ ，故 D 正确。

故选：ACD。

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 甲

【详解】根据题意，因为线性相关系数的绝对值越大，线性相关性越强。

甲、乙、丙、丁四组数据的线性相关系数分别为 -0.95 ， -0.87 ， 0.76 ， 0.92 ，

所以甲组数据的线性相关性最强。故答案为：甲。

14. 25

【详解】当 $a_1 = 3$ 时， $a_2 = 10$ ， $a_3 = 5$ ， $a_4 = 16$ ， $a_5 = 8$ ， $a_6 = 4$ ， $a_7 = 2$ ， $a_8 = 1$ ， $a_9 = 4$ ，...，则数列 $\{a_n\}$ 从第 6 项开始，数列为周期为 3 的周期数列，一个周期三项的和为 7。

因为 $S_5 = 42$ ；所以 $m > 5$ ，由 $7k \leq 90 - 42 < 7(k+1)$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，得 $k = 6$ ，

所以 $S_{25} = S_5 + 6 \times 7 + 4 + 2 = S_{25} = 90$ ，所以 $m = 25$ 。故答案为：25。

15. 4

【详解】设直线 $y = kx - 2$ 与曲线 $C_1: y = x^3$ 相切的切点的坐标为 (x_0, y_0)

$y' = 3x^2$ ，由题意可得 $\begin{cases} k = 3x_0^2 \\ x_0^3 = kx_0 - 2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x_0 = 1 \\ k = 3 \end{cases}$ ，所以直线方程为： $y = 3x - 2$

因为直线 $y = 3x - 2$ 与圆 $C_2: (x - a)^2 + y^2 = 10, (a > 0)$ 相切，

所以 $\frac{|3a - 2|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ ，所以 $a = 4$ 或 $a = -\frac{8}{3}$ (舍)。故答案为：4。

16. 52π

第 5 页

【详解】因为平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $SAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ， $AB \subset$ 面 $ABCD$ ，

又因为 $AB \perp AD$ ，所以 $AB \perp$ 平面 SAD ，所以 $\angle BMA$ 为直线 MB 与平面 SAD 所成的角，

同理 $\angle CMD$ 为直线 MC 与平面 SAD 所成的角，

所以 $\tan \angle CMD = \tan \angle BMA$ ，所以 $\frac{AB}{AM} = \frac{CD}{DM}$ ，即 $MD = 2MA$ 。

在平面 SAD 内，以 A 为坐标原点，以 $\overline{AD}$ 为 x 轴正方向，建立平面直角坐标系，

设 $M(x, y)$ ，则有 $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ ，化简得 $(x+1)^2 + y^2 = 4$ 。

即 M 点的轨迹方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 4$ 。

要使三棱锥 $M-BCD$ 的体积最大，只要 M 点的纵坐标的绝对值最大即可，

令 $x = -1$ ，则 $y = \pm 2$ ，

当三棱锥 $M-BCD$ 的体积最大时，可取 $M(-1, 2)$ ，此时 M 到平面 $ABCD$ 的距离为 2。

三棱锥 $M-BCD$ 外接球的球心在过三角形 BCD 外接圆圆心且垂直平面 BCD 的直线上。

在三棱锥 $M-BCD$ 中，设点 Q 即为等边三角形 BCD 外接圆的圆心，

设三棱锥 $M-BCD$ 外接球的球心为 O ，半径为 R ，设 $OQ = x$ ，

则有 $R^2 = x^2 + 4 = (2-x)^2 + 12$ ，解得 $x = 3$ ，所以 $R^2 = 9 + 4 = 13$ ，

所以三棱锥 $M-BCD$ 外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 52\pi$ 。故答案为： 52π 。

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 【详解】(1) $P(X \leq 49.95) = 0.02 = P(X \leq 50.05)$ ，

$\therefore P(49.95 \leq X \leq 50.05) = 1 - 0.04 = 0.96$ ，

$\therefore$ 计划生产： $1200 \div 0.96 = 1250$ 个零件最为合理；……4 分

(2) 改进前，零件尺寸符合条件的有 1200 个，不符合的有 50 个，

改进后，零件尺寸符合条件的有 1200 个，不符合的有 25 个。

$\therefore$ 其列联表如下：

	合格	不合格	总计
改进前	1200	50	1250
改进后	1200	25	1225
总计	2400	75	2475

$$\therefore K^2 = \frac{2475 \times (1200 \times 25 - 1200 \times 50)^2}{1250 \times 1225 \times 2400 \times 75} \approx 8.082 > 6.635,$$

$\therefore$ 有 99% 的把握认为生产工艺改进与生产零件的尺寸误差有关. ……10 分

18. 【详解】证明：(1) $4S = (a^2 - 3b^2) \sin C = 2ab \sin C$, $\therefore \sin C > 0$

则 $a^2 - 2ab - 3b^2 = 0$, 即 $(a - 3b)(a + b) = 0$, $\therefore a, b > 0$, $\therefore a - 3b = 0$, 即 $a = 3b$,

$\therefore$ 由正弦定理可得, $\sin A = 3 \sin B$. ……4 分

(2) 解: 假设存在正整数 m, n , 使得 $c = mb$ 和 $\tan A = n \tan C$ 同时成立.

$$\therefore \frac{\sin A}{\cos A} = n \times \frac{\sin C}{\cos C}, \text{ 即 } \frac{a}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{nc}{a^2 + b^2 - c^2},$$

化简整理可得, $a^2 + b^2 - c^2 = n(b^2 + c^2 - a^2)$,

$$\therefore c = mb, a = 3b, \therefore 9b^2 + b^2 - m^2b^2 = n(b^2 + m^2b^2 - 9b^2), \text{ 即 } m^2 = \frac{2}{n+1} + 8 \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$\therefore m, n$ 均为正整数, $\therefore n = 1, m = 3$.

故存在 $n = 1, m = 3$ 使得 $c = mb$ 和 $\tan A = n \tan C$ 同时成立 ……12 分

19. 【详解】(1) 因为 $a_{n+1} + 2a_n = 2^{n+2}$, 所以 $a_{n+1} - 2^{n+1} = -2(a_n - 2^n)$,

因为 $a_1 - 2 = 0$, 数列 $\{a_n - 2^n\}$ 为常数列, 所以 $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

即所求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为: $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$. ……4 分

$$(2) \text{ 由 (1) 及题设得, } b_n = \sum_{k=1}^n (a_k^2 - a_k) = \sum_{k=1}^n (4^k - 2^k) = (4 - 2) + (4^2 - 2^2) + \dots + (4^n - 2^n)$$

$$= (4 + 4^2 + \dots + 4^n) - (2 + 2^2 + \dots + 2^n) = \frac{4(1 - 4^n)}{1 - 4} - \frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2}$$

$$= \frac{1}{3} (4^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+1} + 2) = \frac{1}{3} (2^{n+1} - 1)(2^{n+1} - 2) = \frac{2}{3} (2^{n+1} - 1)(2^n - 1), \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{a_n}{b_n} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2^n}{(2^{n+1} - 1)(2^n - 1)} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right),$$

$$\text{所以 } S_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2^1 - 1} - \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{2^3 - 1} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right) = \frac{3(2^n - 1)}{2^{n+1} - 1}.$$

……12 分

20. 【详解】(1) 连接 AB 与 AB_1 相交于点 F , 连接 CF , 如图所示:

∵ 四边形 AA_1B_1B 为菱形, $\therefore F$ 为 AB_1 的中点, 则 $A_1B \perp AB_1$.

$\triangle VAB_1C$ 为等边三角形, 有 $CF \perp AB_1$, $A_1B, CF \subset$ 平面 A_1BC ,

$A_1B \cap CF = F$, $\therefore AB_1 \perp$ 平面 A_1BC4 分

$BC \subset$ 平面 A_1BC , $\therefore AB_1 \perp BC$, 又 $AC \perp BC$, $AB_1, AC \subset$ 平面 AB_1C , $AB_1 \cap AC = A$, $\therefore BC \perp$ 平面

AB_1C . $\because B_1C \subset$ 平面 AB_1C , $\therefore CB_1 \perp CB$6 分

(2) 分别取 AC, AB 的中点 O, G , 连接 B_1O, OG ,

则 $OG \parallel BC$, $\therefore OG \perp$ 平面 AB_1C , $\triangle VAB_1C$ 为等边三角形, $B_1O \perp AC$,

以 O 为原点, $\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB_1}$ 的方向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴正方的空间直角坐标系,

则 $A(0, -2, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $B(4, 2, 0)$, $B_1(0, 0, 2\sqrt{3})$,

设 $\overrightarrow{CE} = \lambda \overrightarrow{CC_1} = \lambda \overrightarrow{BB_1}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 则 $E(-4\lambda, 2-2\lambda, 2\sqrt{3}\lambda)$,

$\therefore \overrightarrow{AE} = (-4\lambda, 4-2\lambda, 2\sqrt{3}\lambda)$, $\overrightarrow{AB_1} = (0, 2, 2\sqrt{3})$

设平面 AB_1E 的一个法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则有 $\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{n} = -4\lambda x + (4-2\lambda)y + 2\sqrt{3}\lambda z = 0 \\ \overrightarrow{AB_1} \cdot \mathbf{n} = 2y + 2\sqrt{3}z = 0 \end{cases}$

令 $z = \lambda$, 则 $y = -\sqrt{3}\lambda$, $x = \sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}$, 即 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}, -\sqrt{3}\lambda, \lambda)$

又 $\because$ 平面 ABC 的法向量为 $\overrightarrow{OB_1} = (0, 0, 2\sqrt{3})$,

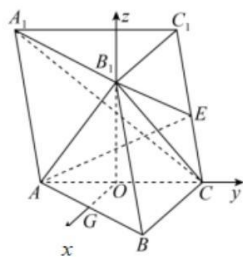
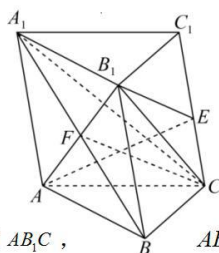
$\therefore$ 平面 AB_1E 与平面 ABC 的夹角的余弦值为 $\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{OB_1} \rangle = \frac{2\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{3(\lambda-1)^2 + 3\lambda^2 + \lambda^2} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$

$\therefore 3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$, $\therefore \lambda = \frac{1}{3}$ 或 $\lambda = -1$ (舍),10 分

此时 $\mathbf{n} = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 又 $\overrightarrow{AB} = (4, 4, 0)$

$\therefore$ 点 B 到平面 AB_1E 的距离为: $\frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = 3\sqrt{3}$12 分

21. 【详解】(1) 设直线 $AB: \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$, 由题意得, $\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}, \therefore \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$,



向, 建立如图所示



故双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$4 分

(2) 显然直线 l 的斜率存在, 设 l 的方程为 $y - 1 = k(x - 2)$, 联立 $\begin{cases} y - 1 = k(x - 2) \\ \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \end{cases}$,

消去 y 得 $(1 - 4k^2)x^2 - 8k(1 - 2k)x - 8(2k^2 - 2k + 1) = 0$, 由 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ 1 - 4k^2 \neq 0 \end{cases}$, 得 $k < \frac{1}{2}$.

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $x_1 + x_2 = \frac{8k(2k - 1)}{4k^2 - 1}$, $x_1 x_2 = \frac{8(2k^2 - 2k + 1)}{4k^2 - 1}$6 分

AB 方程为 $y = \frac{1}{2}(x - 2)$, 令 $x = x_1$, 得 $P\left(x_1, \frac{x_1 - 2}{2}\right)$,

AN 方程为 $y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$, 令 $x = x_1$ 得 $Q(x_1, \frac{x_1 - 2}{x_2 - 2} y_2)$,

因为 $\frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2} = 2k + \frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} = 2k + \frac{x_1 + x_2 - 4}{x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} = 1$ 10 分

所以 $\frac{|MP|}{|PQ|} = \left| \frac{y_1 - \frac{x_1 - 2}{2}}{\frac{x_1 - 2}{2} - \frac{x_1 - 2}{x_2 - 2} y_2} \right| = \left| \frac{\frac{y_1}{x_1 - 2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{y_2}{x_2 - 2}} \right| = 1$, 即 P 是 MQ 的中点.12 分

22. 【详解】(1) 函数 $f(x) = ax^2 - 2x \ln x - 2x \geq 0$ 恒成立. 即 $\frac{a}{2} \geq \frac{\ln x + 1}{x}$, 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立

令 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

所以当 $x = 1$ 时 $g(x)$ 取得最大值, 即 $\frac{a}{2} \geq g(1) = 1$, 即 $a \geq 2$,

故 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$;4 分

(2) 因为 $x > 0$ 时, 存在正实数 a $f(x) > e^{ax} - ax^2 - ex$ 成立,

即 $\frac{e^{ax}}{x} - 2ax + 2 \ln x - (e - 2) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解,

即 $e^{ax - \ln x} - 2(ax - \ln x) - (e - 2) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解, 令 $t = ax - \ln x$, $t' = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}$,

又 $a > 0$, 所以 $t = ax - \ln x$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上递增,

所以当 $x = \frac{1}{a}$ 时, $t = ax - \ln x$ 有最小值 $1 + \ln a$, 则 $t \geq 1 + \ln a$,8 分

则 $e^t - 2t - (e - 2) < 0$ 在 $[1 + \ln a, +\infty)$ 上有解

令 $h(t) = e^t - 2t - (e - 2)$, 则 $h'(t) = e^t - 2$, 所以当 $t < \ln 2$ 时 $h'(t) < 0$, 当 $t > \ln 2$ 时 $h'(t) > 0$,

即 $h(t)$ 在 $(-\infty, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增, 又 $h(1)=0$, $h(0)=3-e>0$, 所以存在 $t_0 \in (0, \ln 2)$ 使得 $h(t_0)=0$,

所以当 $t>1$ 时 $h(t)>0$, 当 $t<t_0$ 时 $h(t)>0$, 当 $t_0<t<1$ 时 $h(t)<0$,

所以只需 $1+\ln a<1$, 即 $0<a<1$ 时满足题意, 故实数 a 的取值范围是 $(0,1)$12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线