榆林市2022～2023年度第四次模拟考试

数学试题解析(文科)

第I卷

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．(杨宪伟老师工作坊)集合 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|y=\ln x\}$，则 $A\cap B=$(　　)

(A)$\{x|0\leqslant x<2\}$　　(B)$\{x|-1<x<2\}$　　(C)$\{x|0<x<2\}$　　(D)$\{x|x>-1\}$

【答案】C

【解析】因为 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|y=\ln x\}=\{x|x>0\}$，所以 $A\cap B=\{x|0<x<2\}$，故选(C)．

2．(杨宪伟老师工作坊)已知 $z=\frac{4-3i}{2-i}$，则$|z|=$(　　)

(A)$\sqrt{5}$　　(B)5　　(C)$2\sqrt{5}$　　(D)$\sqrt{10}$

【答案】A

【解析】

解法1：因为 $z=\frac{4-3i}{2-i}=\frac{(4-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{11-2i}{5}=\frac{11}{5}-\frac{2}{5}i$，所以 $|z|^2=(\frac{11}{5})^2+(\frac{2}{5})^2=5$，故选(A)．

解法2：$|z|=|\frac{4-3i}{2-i}|=\frac{|4-3i|}{|2-i|}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，故选(A)．

3．(杨宪伟老师工作坊)设 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $S_{21}=105$，则 $a_{11}=$(　　)

(A)5　　(B)6　　(C)7　　(D)8

【答案】A

【解析】$S_{21}=21a_{11}=105$，$a_{11}=5$，故选(A)．

4．(杨宪伟老师工作坊)双曲线$\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{6}=1$ 的一条渐近线方程为(　　)

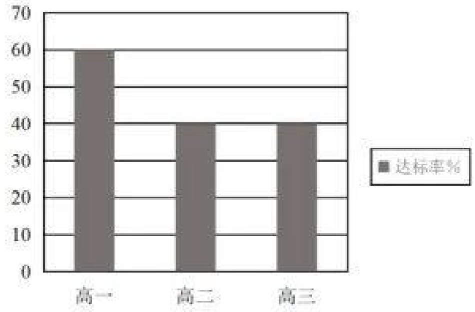
(A)$3x-4y=0$　　(B)$4x-3y=0$　　(C)$\sqrt{3}x+2y=0$　　(D)$2x-\sqrt{3}y=0$

【答案】D

【解析】令$\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{6}=0$，可得：$2x\pm\sqrt{3}y=0$，故选(D)．

5．(杨宪伟老师工作坊)大力开展体育运动，增强学生体质，是学校教育的重要目标之一．某校组织全校学生进行立定跳远训练，为了解训练的效果，从该校学生中随机抽取100人进行立定跳

远达标测试，其中高一抽取了 40 人，高二抽取了 30 人，高三抽取了 30 人，达标测试数据如图所示，则估计该校学生的平均达标率为(　　)



(A)42%　　(B)46%　　(C)48%　　(D)54%

【答案】C

【解析】该校学生的平均达标率为：60%×0.4+40%×0.3+40%×0.3=48%，故选(C).

6. (杨宪伟老师工作坊)已知函数 $f(x)=x^2e^x+2x+1$，则 $f(x)$的图象在 $x=0$ 处的切线方程为(　　)

(A)$4x-y+1=0$　　(B)$2x-y+1=0$　　(C)$4ex-y+2=0$　　(D)$2ex-y+1=0$

【答案】B

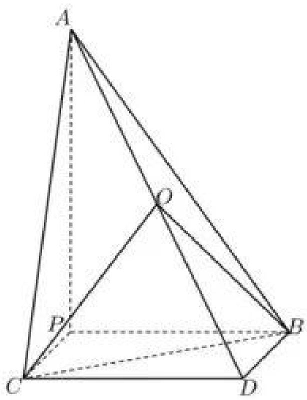
【解析】$f(x)=x^2e^x+2x+1$，$f'(x)=(2x+x^2)e^x+2$，所以 $f'(0)=2$，$f(0)=1$，所以 $f(x)$的图象在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=2x+1$，故选(B).

7. (杨宪伟老师工作坊)已知球 O 的内接三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 6，且 PA，PB，PC 的长分别为 6，3，2，则三棱锥 $A-BOC$ 的体积为(　　)

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)6

【答案】B

【解析】$V_{P-ABC}=V_{C-PAB}\leqslant\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times PA\times PB\times PC=6$，所以 PA，PB，PC 互相垂直，而 O 为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球球心，所以 $V_{A-BOC}=V_{O-ABC}=\frac{1}{2}V_{D-ABC}=\frac{1}{2}V_{P-ABC}=3$，故选(B).



8．(杨宪伟老师工作坊)将函数 $y=\cos 2x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{20}$个单位长度，再把所得图象各点的横坐标缩小到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，所得图象的一条对称轴为 $x=($　　$)$

(A)$\frac{\pi}{80}$　　(B)$\frac{\pi}{60}$　　(C)$\frac{\pi}{40}$　　(D)$\frac{\pi}{20}$

【答案】C

【解析】

解法 1：将函数 $y=\cos 2x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{20}$个单位长度，得到的是函数 $y=\cos 2(x-\frac{\pi}{20})=\cos(2x-\frac{\pi}{10})$，再把所得图象各点的横坐标缩小到原来的$\frac{1}{2}$，得到的是函数 $y=\cos(4x-\frac{\pi}{10})$，令 $4x-\frac{\pi}{10}=k\pi(k\in Z)$，解得：$x=\frac{\pi}{40}+\frac{k\pi}{4}(k\in Z)$，故选(C)．

解法 2：函数 $y=\cos 2x$ 的一条对称轴为 $x=0$，将其向右平移$\frac{\pi}{20}$个单位长度，再将横坐标缩小到原来的$\frac{1}{2}$，可得：$x=\frac{\pi}{40}$，故选(C)．

9．(杨宪伟老师工作坊)已知 $a=\log_3\sqrt{2}$，$b=0.3^{0.5}$，$c=0.5^{-0.4}$，则(　　)

(A)$c<b<a$　　(B)$c<a<b$　　(C)$a<b<c$　　(D)$b<c<a$

【答案】C

【解析】因为 $a=\log_3\sqrt{2}\in(0，0.5)$，$b=0.3^{0.5}\in(0.5，1)$，$c=0.5^{-0.4}\in(1，2)$，所以 $a<b<c$，故选(C)．

10．(杨宪伟老师工作坊)已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若$\frac{S_4}{S_8}=\frac{1}{7}$，则$\frac{S_{12}}{S_4}=($　　$)$

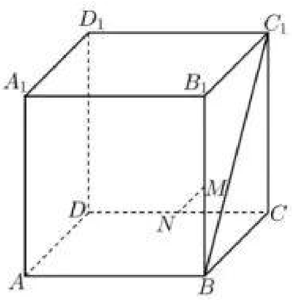
(A)41　　(B)45　　(C)36　　(D)43

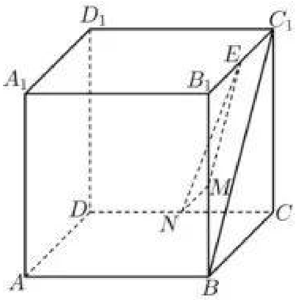
【答案】D

【解析】因为$\{a_n\}$为等比数列，$\frac{S_4}{S_8}=\frac{1}{7}$，所以$\frac{S_{12}-S_8}{S_8-S_4}=\frac{S_8-S_4}{S_4}=6$，即：$S_8=7S_4$，$S_{12}=43S_4$，故选(D)．

11．(杨宪伟老师工作坊)如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为 BB_1，CD 的中点，则异面直线 MN 与 BC_1 所成角的余弦值为(　　)

(A)$\frac{\sqrt{3}}{6}$　　(B)$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　(C)$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(D)$\frac{\sqrt{3}}{2}$





【答案】A

【解析】取 B_1C_1 的中点 E，连结 ME，EN，则平面 $ME/\!/CC_1$，所以 $\angle EMN$ 即为异面直线 MN 与 BC_1 所成角，在 $\triangle EMN$ 中，$M\quad N=EN=\sqrt{6}$，$ME=\sqrt{2}$，$\cos\angle EMN=\dfrac{ME}{2MN}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，故选(A).

12．(杨宪伟老师工作坊)若函数 $f(x)$ 在 $x\in[a，b]$时，函数值 y 的取值区间恰为$[\dfrac{k}{b}，\dfrac{k}{a}](k>0)$，则称$[a，b]$为 $f(x)$的一个“k 倍倒域区间”．定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $g(x)$，当 $x\in(-\infty，0]$时，$g(x)=x^2+(m+2)x+m-2$，则 $g(x)$在区间$[m，m+2]$内的“8 倍倒域区间”为(　　)

(A)$[2，4]$　　(B)$[2，\sqrt{2}+1]$　　(C)$[2，\sqrt{5}]$　　(D)$[2，\sqrt{5}+1]$

【答案】D

【解析】因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $g(x)$，当 $x\in(-\infty，0]$时，$g(x)=x^2+(m+2)x+m-2$，所以 $g(0)=m-2=0$，即：$m=2$，故当 $x\in(-\infty，0]$时，$g(x)=x^2+4x$，当 $x\in(0，+\infty]$时，$g(x)=-x^2+4x$，$g(x)$在区间$[2，4]$上递减，$g(x)$在区间$[a，b]$内的“8 倍倒域区间”为$[\dfrac{8}{b}，\dfrac{8}{a}]$，即：$g(a)=-a^2+4a=\dfrac{8}{a}$，$g(b)=-b^2+4b=\dfrac{8}{b}$，故 a，b 是方程 $x^3-4x^2+8=(x-2)(x^2-2x-4)=0$ 的根，且 a，$b\in[2，4]$，解得：$a=2$，$b=\sqrt{5}+1$，故选(D).

第Ⅱ卷

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．(杨宪伟老师工作坊)已知向量 $\boldsymbol{a}=(3，2)$，$\boldsymbol{b}=(\lambda，-4)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则$\lambda=$___▲___.

【答案】7

【解析】因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，即：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2$，$3\lambda-8=13$，$\lambda=7$.

14．(杨宪伟老师工作坊)设 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-2y-6\leqslant 0\\2x-y+8\geqslant 0\\y-4\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最大值为

__▲__.

【答案】32

【解析】$z=2x+y\leqslant 2(2y+6)+y=12+5y\leqslant 32$，当 $x=14$，$y=4$ 时，取等号.

15. (杨宪伟老师工作坊)中国象棋是中国棋文化，也是中华民族的文化瑰宝，它源远流长，趣味浓厚，基本规则简明易懂.张三和李四下棋，张三获胜的概率是$\frac{1}{3}$，和棋的概率是$\frac{1}{4}$，则张三不输的概率为___▲___.

【答案】$\frac{7}{12}$

【解析】$P=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$.

16. (杨宪伟老师工作坊)已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的顶点为 O，经过过点 A，且 F 为抛物线 C 的焦点，若$|AF|=3|OF|$，则△OAF 的面积为___▲___.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】设 $A(x_0，y_0)$，则$|AF|=x_0+1=3|OF|=3$，$x_0=2$，$|y_0|=2\sqrt{2}$，故△OAF 的面积$=\frac{1}{2}|y_0|=\sqrt{2}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17 题-第 21 题为必考题，每个考题考生必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17. (杨宪伟老师工作坊)(12 分)电影《中国乒乓之绝地反击》讲述了中国乒乓男团在 1995 年天津世乒赛绝地反击、重回巅峰的故事. 该片致敬国球，重温历史瞬间，再现自我博弈与家国情怀.某电影平台为了解观众对该影片的感受，从所有参评的观众中随机抽取 400 人进行调查，其中的男观众 200 人中有 120 人给了“赞一个”的评价，女观众有 90 人给了“赞一个”的评价.

(1)把下面 2×2 列联表补充完整，并判断是否有 99.5%的把握认为对该影片的评价与性别有关；

性别	评价结果		合计
	赞一个	一般	
男观众	120		200
女观众	90		
合计			

(2)从随机抽取的 400 人中所有给出“赞一个”的观众中按性别采用分层抽样的方法随机抽取 7 人参加宣传活动，为了方便活动，现从 7 人中随机选出 2 人作为组长，求所选出的 2 人是不同性别的概率.

参考公式：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

α	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

【解析】(1)2×2 列联表如下：

性别	评价结果		合计
	赞一个	一般	
男观众	120	80	200
女观众	90	110	200
合计	210	190	400

$\chi^2=\dfrac{400(120\times110-80\times90)^2}{200\times200\times210\times190}=\dfrac{1200}{133}>7.879$，故有 99.5%的把握认为对该影片的评价与性别有关；

(2)随机抽取的 7 人中，男观众有 4 人，记为 1、2、3、4，女观众有 3 人，记为 5、6、7，从 7 人中随机选出 2 人作为组长有如下可能：(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(1，6)，(1，7)，(2，3)，(2，4)，(2，5)，(2，6)，(2，7)，(3，4)，(3，5)，(3，6)，(3，7)，(4，5)，(4，6)，(4，7)，(5，6)，(5，7)，(6，7)，共 21 种，满足 2 人是不同性别的有(1，5)，(1，6)，(1，7)，(2，5)，(2，6)，(2，7)，(3，5)，(3，6)，(3，7)，(4，5)，(4，6)，(4，7)，共 12 种，故所选出的 2 人是不同性别的概率 $P=\dfrac{12}{21}=\dfrac{4}{7}$.

18．(杨宪伟老师工作坊)(12 分)$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sqrt{2}\cos A(b\cos C+c\cos B)=a$.

(1)求 A；

(2)若 $a=\sqrt{5}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{2}-1$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

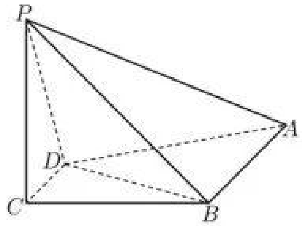
【解析】(1)因为 $\sqrt{2}\cos A(b\cos C+c\cos B)=a$，所以 $\sqrt{2}a\cos A=a$，即：$\sqrt{2}\cos A=1$，$A=\dfrac{\pi}{4}$；

(2)$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}-1$，即：$bc=4-2\sqrt{2}$，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-\sqrt{2}bc=5$，即：$(b+c)^2=(2+\sqrt{2})bc+5=9$，$b+c=3$，故 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+\sqrt{5}$.

19．(杨宪伟老师工作坊)(12 分)如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，已知底面 $ABCD$ 为梯形，$AB/\!/CD$，$AB=BD=2CD=2$，$\angle BDC=60^\circ$．

(1)证明：$BC\perp PD$.

(2)若 $PC\perp$ 平面 $ABCD$，$PC=\sqrt{3}$，求点 A 到平面 PBD 的距离.



【解析】(1)在$\triangle BCD$中，由余弦定理可得：$BC^2=1^2+2^2-2=3=BD^2-CD^2$，即：$BC\perp CD$，因为平面$PCD\perp$平面$ABCD$，且平面$PCD\cap$平面$ABCD=CD$，所以$BC\perp$平面$PCD$，$BC\perp PD$；

(2)因为$PC\perp$平面$ABCD$，$PC=\sqrt{3}$，所以$PD=BD=2$，$PB=\sqrt{6}$，$S_{\triangle PBD}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，设点$A$到平面$PBD$的距离为$h$，则$V_{A-PBD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle PBD}h=\dfrac{\sqrt{15}}{6}h=V_{P-ABD}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$，故$h=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$.

20．(杨宪伟老师工作坊)(12分)已知函数$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3ax+2a^2\ln x$，$a\neq0$.

(1)讨论$f(x)$的单调区间；

(2)若$f(x)$有3个零点，求a的取值范围.

【解析】(1)因为$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3ax+2a^2\ln x$，所以$f'(x)=\dfrac{(x-a)(x-2a)}{x}$，而$a\neq0$，所以当$a>0$时，$f(x)$的增区间为$(0，a)$和$(2a，+\infty)$，减区间为$(a，2a)$；当$a<0$时，$f(x)$的增区间为$(0，+\infty)$，无减区间；

(2)因为$f(x)$有3个零点，所以$a>0$，$f(a)=2a^2(\ln a-\dfrac{5}{4})>0$，$f(2a)=2a^2(\ln 2a-2)<0$，解得：$e^{\frac{5}{4}}<a<\dfrac{e^2}{2}$，此时$f(1)=\dfrac{1}{2}-3a<0$，$f(6a)=2a^2\ln 6a>0$，$f(x)$在$(1，a)$、$(a，2a)$和$(2a，6a)$各有1个零点，共有3个零点，满足题意，所以$a$的取值范围为$(e^{\frac{5}{4}}，\dfrac{e^2}{2})$.

21．(杨宪伟老师工作坊)(12分)已知椭圆W：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_2$且垂直于$x$轴的直线被椭圆$W$所截得的线段长为$2\sqrt{2}$.

(1)求椭圆W的方程；

(2)直线$y=kx(k\neq0)$与椭圆W交于A，B两点，连接AF_1另交椭圆W于点C，若$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$，求直线AC的方程.

【解析】(1)因为$\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{b^2}=1$，所以$b^2=4$，而$e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=1-\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$，故$a^2=2b^2=8$，椭圆$W$的方程为：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$；

(2))解法1：设直线AC的方程为：$x=my-2$，$A(x_1，y_1)$，$C(x_2，y_2)$，联立$\begin{cases}x=my+2\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$ +

2)$y^2-4my-4=0$，则 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AOC}=2|y_1-y_2|=\dfrac{8\sqrt{2m^2+2}}{m^2+2}=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$，解得：$m^2=8$，$m=\pm 2\sqrt{2}$，

故直线 AC 的方程为：$x\pm 2\sqrt{2}y+2=0$.

解法 2：设 $\angle AF_1O=\theta$，$|AF_1|=r_1$，$|CF_1|=r_2$，则 $|AF_2|=4\sqrt{2}-r_1$，在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理可得：$(4\sqrt{2}-r_1)^2=r_1^2+16-8r_1\cos\theta$，则 $r_1=\dfrac{2}{\sqrt{2}-\cos\theta}$，同理：$r_2=\dfrac{2}{\sqrt{2}+\cos\theta}$，所以 $|AC|=r_1+r_2=\dfrac{4\sqrt{2}}{2-\cos^2\theta}$ $=\dfrac{4\sqrt{2}}{1+\sin^2\theta}$，$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AOC}=|AC||OF_1|\sin\theta=\dfrac{8\sqrt{2}\sin\theta}{1+\sin^2\theta}=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$，解得：$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$，$\tan\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故直线 AC 的方程为：$x\pm 2\sqrt{2}y+2=0$.

(二)选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答，并用 2B 铅笔将所选题号涂黑，多涂、错涂、漏涂均不给分，如果多做，则按所做的第一题计分．

22．(杨宪伟老师工作坊)[选修 4－4：坐标系与参数方程](10 分)在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的方程为 $x+y=5$，圆 M 以(3，0)为圆心且与 l 相切．以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．

(1)求圆 M 的极坐标方程；

(2)若射线 $\theta=\alpha(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}，\rho>0)$ 与圆 M 交于点 A，B 两点，且 $\dfrac{1}{|OA|}+\dfrac{1}{|OB|}=\dfrac{1}{7}$，求直线 AB 的直角坐标方程．

【解析】(1)圆 M 的半径 $r=\dfrac{|3+0-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，设 $P(\rho，\theta)$ 为圆 M 上的任意一点，则在 $\triangle OPM$ 中，由余弦定理可得：$2=\rho^2+9-6\rho\cos\theta$，即：$\rho^2-6\rho\cos\theta+7=0$，故圆 M 的极坐标方程为：$\rho^2-6\rho\cos\theta+7=0$；

(2)令 $\theta=\alpha$，可得：$\rho^2-6\rho\cos\alpha+7=0$，$\dfrac{1}{|OA|}+\dfrac{1}{|OB|}=\dfrac{|OA|+|OB|}{|OA|\cdot|OB|}=\dfrac{6\cos\alpha}{7}=\dfrac{1}{7}$，解得：$\cos\alpha=\dfrac{1}{6}$，而 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\tan\alpha=\sqrt{35}$，直线 AB 的直角坐标方程为 $y=\sqrt{35}x$.

23．(2023 年榆林市三模)[选修 4－5：不等式选讲](10 分)已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+2|$ 的最小值为 M.

(1)解关于 x 的不等式 $f(x)<M+|2x+2|$；

(2)若正数 a，b 满足 $a^2+2b^2=M$，求 $2a+b$ 的最大值．

【解析】(1)$f(x)=|2x-1|+|2x+2|\geqslant|(2x-1)-(2x+2)|=3$，当 $x=-1$ 时可取等号，故 $M=3$，不等式 $f(x)<M+|2x+2|$ 等价于 $|2x-1|<3$，解得：$-1<x<2$，故原不等式的解集为$(-1，2)$；

(2)由柯西不等式可得：$(a^2+2b^2)[2^2+(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2]\geqslant(2a+b)^2$，即：$2a+b\leqslant\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$，当且仅当 $a=4b=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 时取等号，故 $2a+b$ 的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。