

绝密★启封并使用完毕前

2023年安庆市高三模拟考试（二模）

数学试题

命题：安庆市高考命题研究课题组

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。考试时间 120 分钟。

第 I 卷

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，有且只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $M = \left\{ x \mid \frac{x}{x-1} \leq 0 \right\}$, $N = \left\{ x \mid \left(\frac{2}{3} \right)^x > 1 \right\}$, 则 $M \cap N =$

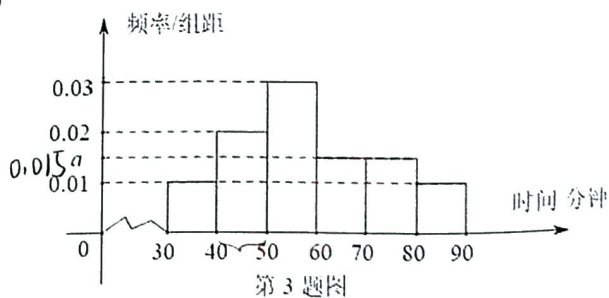
- A. \emptyset B. $\{x \mid x < 0\}$ C. $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$ D. $\{x \mid 0 < x < 1\}$

2. 若复数 z 满足 $i \cdot z = 2022 + i^{2023}$ (i 是虚数单位) z 的共轭复数是 \bar{z} , 则 $z - \bar{z}$ 的模是

- A. $\sqrt{4044^2 + 4}$ B. 4044 C. 2 D. 0

3. 为了解学生每天的体育活动时间，某市教育部门对全市高中学生进行调查，随机抽取 1000 名学生每天进行体育运动的时间，按照时长（单位：分钟）分成 6 组：第一组 $[30, 40)$ ，第二组 $[40, 50)$ ，第三组 $[50, 60)$ ，第四组 $[60, 70)$ ，第五组 $[70, 80)$ ，第六组 $[80, 90]$. 对统计数据整理得到如图所示的频率分布直方图，则可以估计该市高中学生每天体育活动时间的第 25 百分位数约为

- A. 43.5 分钟
B. 45.5 分钟
C. 47.5 分钟
D. 49.5 分钟



4. 已知非零向量 \vec{a} , \vec{b} 的夹角为 θ , $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$, 且 $|\vec{a}| |\vec{b}| \geq \frac{4}{3}$, 则夹角 θ 的最小值为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

5. 已知第二象限角 α 满足 $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{2}{3}$, 则 $\sin 2\beta - 2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$ 的值为

- A. $-\frac{1}{9}$ B. $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1^2 + a_4^2 = 4$, 则 $a_2 + a_3$ 不可能取的值是 ()

- A. -3 B. $-2\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{2}$

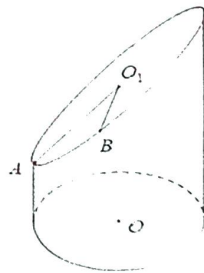
7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x|\ln x|, & x > 0 \\ -xe^x, & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - |x^2 - kx|$ 恰有 3 个零点,

则实数 k 的取值范围是

- A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$
C. $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$

8. 一底面半径为 1 的圆柱, 被一个与底面成 45° 角的平面所截

(如图), O 为底面圆的中心, O_1 为截面的中心, A 为截面上距离底面最小的点, A 到圆柱底面的距离为 1, B 为截面图形弧上的一点, 且 $\angle AO_1B = 60^\circ$, 则点 B 到底面的距离是



第 8 题图

- A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{14 - 2\sqrt{7}}{7}$
C. $\frac{14 - \sqrt{7}}{7}$ D. $\frac{\sqrt{14}}{2}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 将函数 $f(x) = \sin \omega x + a \cos \omega x$ ($a > 0, \omega > 0$) 图象上点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 然后将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 得到函数 $g(x) = 2 \cos(2x + \varphi)$ 的图象. 则下列说法中正确的是

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. 函数 $g(x)$ 的图象有一条对称轴为 $x = -\frac{\pi}{12}$

C. 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$)

D. 函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$

10. 在三棱锥 $A-BCD$ 中, G, E, P, H 分别是 $\triangle BCD, \triangle ACD, \triangle ABD, \triangle ABC$ 的重心. 则下列命题中正确的有

A. $GE \parallel$ 平面 ABD

B. $V_{\text{三棱锥}A-GBC} = \frac{1}{3} V_{\text{三棱锥}A-DBC}$

C. 四条直线 AG, BE, CP, DH 相交于一点

D. $AB = 2GE$

11. 牛顿用“作切线”的方法求函数的零点时, 给出了“牛顿数列”, 它在航空航天中应用非常广泛. 其定义是: 对于函数 $f(x)$ 和数列 $\{x_n\}$, 若

$(x_{n+1} - x_n)f'(x_n) + f(x_n) = 0$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列. 已知函数

$f(x) = x^2 - 4$, 数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列, 且 $a_n = \ln \frac{x_n + 2}{x_n - 2}$, $a_1 = 1$, $x_n > 2$ ($n \in \mathbb{N}^*$),

则下列结论中正确的是

A. $x_1 = \frac{2e+2}{e-1}$

B. $\frac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2} = \frac{(x_n-2)^2}{(x_n+2)^2}$

C. $\{a_n\}$ 是等比数列

D. $a_6 = 32$

12. 已知 A, B 为抛物线 $y = x^2$ 上两点, 以 A, B 为切点的抛物线的两条切线交于点

P , 设以 A, B 为切点的抛物线的切线斜率为 k_A, k_B , 过 A, B 的直线斜率为

k_{AB} , 则以下结论正确的有

k_{AB} , k_B 成等差数列;

B. 若点 P 的横坐标为 $\frac{1}{2}$, 则 $k_{AB} = \frac{1}{2}$;

C. 若点 P 在抛物线的准线上, 则 $\triangle ABP$ 不是直角三角形;

D. 若点 P 在直线 $y = 2x - 2$ 上, 则直线 AB 恒过定点;

三、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

13. 设某批产品中, 甲、乙、丙三个车间生产的产品分别占 45%、35%、20%, 甲、乙车间生产的产品的次品率分别为 2% 和 3%. 现从中任取一件, 若取到的是次品的概率为 2.95%, 则推测丙车间的次品率为_____。

14. 在棱长为 4 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 是棱 AA_1 上一点, 且 $AE = 1$. 过三点 E 、 B_1 、 C_1 的平面截该正方体的内切球, 所得截面圆面积的大小为_____。

15. 已知双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 的两个焦点分别为 F_1 , F_2 , 过 x 轴上方的焦点 F_1 的直线与双曲线上支交于 M , N 两点, 以 NF_2 为直径的圆经过点 M , 若 $|MF_2|, |MN|, |NF_2|$ 成等差数列, 则该双曲线的渐近线方程为_____。

16. 已知函数 $f(x) = e^{ax} - ax$, 其中 $a > 0$, 若不等式 $f'(x) \geq 3(x^2 - \frac{1}{x}) \ln x$ 对任意 $x > 1$ 恒成立, 则 a 的最小值为_____。

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_9 = 81$, 且 a_2, a_5, a_{14} 成等比数列。

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(II) 设 $b_n = \sqrt{1 + \frac{1}{S_n} + \frac{1}{S_{n+1}}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $2b \sin C \cdot \tan \frac{A}{2} = a$

(I) 若角 $B = \frac{\pi}{6}$, 求角 A 的大小;

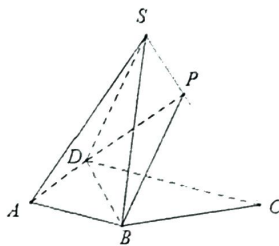
(II) 若 $a = 4$, $\cos 2A = \frac{1}{8}$, 求 b .

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是梯形, $AB \parallel CD$, $\angle BAD = 90^\circ$, $CD = 2AB = 2AD = 2$, 侧面 SCD 是等边三角形, 侧面 SBC 是等腰直角三角形, $SB = BC$.

(I) 求证: $SB \perp$ 平面 $ABCD$;

(II) 若 P 是棱 SC 上的一点, 且 $SA \parallel$ 平面 PBD . 求平面 PBD 与平面 $ABCD$ 所成二面角的余弦值.



第 19 题图

20. (本小题满分 12 分)

为了“锤炼党性修养, 筑牢党性根基”, 党员教师小 A 每天自觉登录“学习强国 APP”, 参加各种学习活动, 同时热衷于参与四人赛。每局四人赛是由网络随机匹配四人进行比赛, 每题回答正确得 20 分, 第 1 个达到 100 分的比赛者获得第 1 名, 赢得该局比赛, 该局比赛结束。每天的四人赛共有 30 局, 前 2 局是有效局, 根据得分情况获得相应名次, 从而得到相应的学习积分, 第 1 局获得第 1 名的得 3 分, 获得第 2、3 名的得 2 分, 获得第 4 名的得 1 分; 第 2 局获得第 1 名的得 2 分, 获得第 2、3、4 名的得 1 分; 后 28 局是无效局, 无论获得什么名次, 均不能获得学习积分。经统计, 小 A 每天在第 1 局四人赛中获得 3 分、

2 分、1 分的概率分别为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$, 在第 2 局四人赛中获得 2 分、1 分的概率分别

为 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

(I) 设小 A 每天获得的得分为 X , 求 X 的分布列、数学期望和方差;

(II) 若小 A 每天赛完 30 局, 设小 A 在每局四人赛中获得第 1 名从而赢得该局比

赛的概率为 $\frac{1}{3}$, 每局是否赢得比赛相互独立, 请问在每天的 30 局四人赛中,

小 A 赢得多少局的比赛概率最大?

21. (本小题满分12分)

如图，在平面直角坐标系 xOy 中， A, B, C 分别为椭圆

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

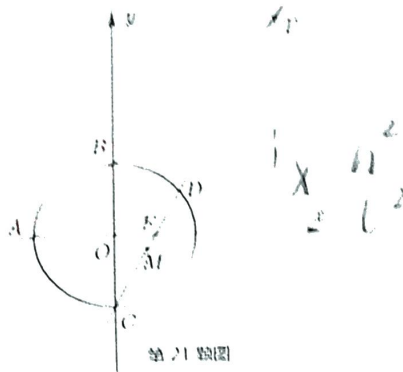
的一个顶点， $F(c, 0)$ 为其右焦点，直线 AB 与直

线 CF 相交于点 T .

(I) 若点 T 在直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 上，求椭圆 E 的离心率；

(II) 设直线 CF 与椭圆 E 的另一个交点为 D ， M 是线段 CD 的中点，椭圆 E 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，试探究 $\frac{|TM|}{|CD|}$ 的值是否为定值（与 a, b 无关）. 若为定值，求出该

定值；若不为定值，请说明理由.



22. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = a \ln x + bx^2 e^{1-x}$, $a, b \in \mathbb{R}$. $e \approx 2.71828 \dots$.

(I) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程是 $y = x + \ln 2$, 求 a 和 b 的值;

(II) 若 $a = e$, 且 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 恰有两个零点, 求 b 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

