# 高三数学考试参考答案(理科)

1. A 【解析】本题考查集合的并集,考查数学运算的核心素养.

因为 $A=(\frac{1}{2},+\infty)$,$B=(-1,3)$,所以 $A\cup B=(-1,+\infty)$.

2. A 【解析】本题考查向量的坐标运算与平行,考查数学运算的核心素养.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(-3,3)$,因为$\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{CD}$,所以$-3(2m+1)=3m$,解得 $m=-\frac{1}{3}$.

3. B 【解析】本题考查复数的新概念与复数的运算,考查数学运算的核心素养.

因为 $z=(1-i)^2(1+i)=-2i(1+i)=2-2i$,所以 $3-2i$ 与 $z$ 的虚部相等,所以 $3-2i$ 是 $z$ 的同部复数.

4. D 【解析】本题考查三角恒等变换,考查逻辑推理的核心素养.

因为 $\tan(\theta-\pi)=\tan\theta$,所以乙和丁的判断只有一个正确. $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$,若丁的判断正确,则 $\tan\theta\geqslant 2$,$\tan 2\theta<0$,丙的判断错误;若乙的判断正确,则 $\tan 2\theta=\frac{4}{3}>1$,丙的判断也正确,此时,$\theta$ 是第一或第三象限角,所以当 $\theta$ 是第三象限角,且 $\tan\theta=\frac{1}{2}$时,只有丁的判断错误.故此人是丁.

5. A 【解析】本题考查三视图与简单几何体的体积,考查空间想象能力与运算求解能力.

由三视图可知,该几何体是四分之一个圆柱(高为$\frac{2}{3}$,底面半径为1),其体积$V=\frac{1}{4}\pi\times1^2\times\frac{2}{3}=\frac{\pi}{6}$.设球 $O$ 的半径为 $r$,则$\frac{4}{3}\pi\times r^3=\frac{\pi}{6}$,解得 $r=\frac{1}{2}$.

6. C 【解析】本题考查相互独立事件的概率,考查应用意识与逻辑推理的核心素养.

因为前两局甲都输了,所以甲需要连胜四局或第三局到第六局输1局且第七局胜,甲才能最后获胜,所以甲最后获胜的概率为$(\frac{1}{2})^4+C_4^1\times(1-\frac{1}{2})\times(\frac{1}{2})^4=\frac{3}{16}$.

7. B 【解析】本题考查椭圆的实际应用,考查直观想象的核心素养.

由题意可知,$|PQ|+|PF_1|+|QF_1|=4a=3\times2c$,所以 $c=\frac{2}{3}a$,$b=\sqrt{a^2-c^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}a$.由该椭球横截面的最大直径为2米,可知 $2b=2$ 米,所以 $b=1$ 米,$a=\frac{3\sqrt{5}}{5}$米,该椭球的高为 $2a=\frac{6\sqrt{5}}{5}$米.

8. A 【解析】本题考查函数的奇偶性与单调性,考查逻辑推理的核心素养.

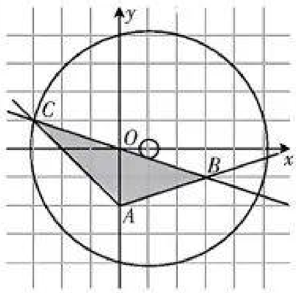
因为当 $0\leqslant x\leqslant2$ 时,$f(x)=2x-x^2$,当 $x>2$ 时,$f(x)=|x-3|-1$,

且 $f(2)=|2-3|-1=0$,所以 $f(x)$在$[0,1]$上单调递增,在$(1,3)$上单调递减,在$[3,+\infty)$上

单调递增. 因为 $-f(-\sqrt{26})=f(\sqrt{26})>f(5)=1=f(1)$, $1<2^{0.3}<3^{0.3}<3$,

所以 $-f(-\sqrt{26})>f(2^{0.3})>f(3^{0.3})$.

9. D **【解析】本题考查线性规划与圆,考查直观想象的核心素养与数形结合的数学思想.**




作出不等式组表示的可行域,如图所示. 当直线 $BC: x+3y=0$ 与圆 $(x-1)^2+y^2=m$ 相切时, $\sqrt{m}=\frac{1}{\sqrt{10}}$,则 $m=\frac{1}{10}$,则 $m$ 的最小值为 $\frac{1}{10}$;当圆 $(x-1)^2+y^2=m$ 经过点 $C(-3,1)$ 时, $m=(-3-1)^2+1^2=17$,则 $m$ 的最大值为 17. 故 $m$ 的取值范围是 $[\frac{1}{10},17]$.

10. C **【解析】本题考查空间向量与立体几何,考查数学运算的核心素养.**

依题意可得 $\overrightarrow{DA}=(a^2+1,2a,3)$, $\overrightarrow{BC}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{BD}=(-1,0,2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 $BCD$ 的法向量,

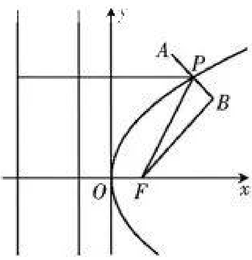
则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y+z=0,\\ -x+2z=0,\end{cases}$ 令 $x=2$,得 $\boldsymbol{n}=(2,-3,1)$.

所以点 $A$ 到平面 $BCD$ 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|2a^2-6a+5|}{\sqrt{14}}=\frac{2(a-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{2}}{\sqrt{14}}$.

当 $a=\frac{3}{2}$ 时, $d$ 取得最小值,此时, $\overrightarrow{AE}=(0,-3,-1)$.

所以直线 $AE$ 与平面 $BCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AE}||\boldsymbol{n}|}=\frac{8}{\sqrt{10}\times\sqrt{14}}=\frac{4\sqrt{35}}{35}$.

11. A **【解析】本题考查抛物线定义的应用,考查直观想象的核心素养以及化归与转化的数学思想.**




如图, $d_2=d_1+2$,因为 $A(2,4)$ 关于 $P$ 的对称点为 $B$,所以 $|PA|=|PB|$,所以 $d_1+d_2+|AB|=2d_1+2+2|PA|=2(d_1+|PA|)+2=2(|PF|+|PA|)+2\geqslant 2|AF|+2=2\sqrt{17}+2$,所以当 $P$ 在线段 $AF$ 上时, $d_1+d_2+|AB|$ 取得最小值,且最小值为 $2\sqrt{17}+2$.

12. B **【解析】本题考查三角函数的图象及其性质,考查逻辑推理的核心素养以及分类讨论的数学思想.**

$f(x)=\sqrt{A^2+4}\sin(\omega x+\varphi)$,由题意得 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,则 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$,得 $\omega=2$. 因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称,所以 $f(0)=f(\frac{\pi}{3})$,

即 $2=A\sin\frac{2\pi}{3}+2\cos\frac{2\pi}{3}$,解得 $A=2\sqrt{3}$,则 $f(x)=2\sqrt{3}\sin 2x+2\cos 2x=4\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

$g(x)=f(x)-a$ 的零点个数等价于方程 $f(x)=a$ 实根的个数.

先研究方程 $f(x)=a$ 在 $[0,\pi]$ 内实根的个数.

当 $a=\pm4$ 时，方程 $f(x)=a$ 在 $[0,\pi]$ 内实根的个数为 1；

当 $a\in(-4,2)\cup(2,4)$ 时，方程 $f(x)=a$ 在 $[0,\pi]$ 内实根的个数为 2；

当 $a=2$ 时，方程 $f(x)=a$ 在 $[0,\pi]$ 内实根的个数为 3，其中在 $(0,\pi]$ 内实根的个数为 2.

因为 $f(x)$ 是周期为 $\pi$ 的函数，所以当 $a\in(-4,4)$ 时，在 $(\pi,2\pi]$，$(2\pi,3\pi]$，$(3\pi,4\pi]$，…，$(2022\pi,2023\pi]$ 内方程 $f(x)=a$ 实根的个数均为 2.

因为 $g(x)=f(x)-a$ 在 $[0,n\pi](n\in\mathbf{N}^*)$ 内恰有 2023 个零点，且 2023 为奇数，所以 $a\in(-4,2)\cup(2,4)$ 不合题意.

当 $a=\pm4$ 时，$n=2023$；当 $a=2$ 时，$n=1011$. 故满足条件的有序实数对 $(a,n)$ 只有 3 对.

13.4 **【解析】本题考查系统抽样，考查数据处理能力.**

因为 $\frac{600}{50}=12$，所以被抽检的零件的最小编号为 003. 由 $231<3+12(n-1)<291$，得 $20<n<25$，则 $n=21,22,23,24$，故编号在 $(231,291)$ 内的零件将被抽检的个数为 4.

14.1 **【解析】本题考查对数的运算，考查数学运算的核心素养.**

因为 $\lg x=2\lg y$，$\lg(x+y)=\lg y-\lg x$，所以 $x=y^2$，$x+y=\frac{y}{x}(x>0,y>0)$，

则 $y^2+y=\frac{1}{y}$，所以 $y^3+y^2=1$.

15.3280 **【解析】本题考查解三角形的实际应用，考查直观想象的核心素养.**

由题可知 $BC=DE=48\times\frac{300}{180}=80$ 步，$BF=100$ 步，$DG=120$ 步，$BD=800$ 步.

在 $Rt\triangle AHF$ 中，$\frac{AH}{HF}=\frac{BC}{BF}=\frac{4}{5}$，在 $Rt\triangle AHG$ 中，$\frac{AH}{HG}=\frac{DE}{DG}=\frac{2}{3}$，

所以 $HF=\frac{5}{4}AH$，$HG=\frac{3}{2}AH$，则 $HG-HF=800-100+120=820=\frac{1}{4}AH$，

所以 $AH=3280$ 步.

16.$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ **【解析】本题考查导数与不等式的交汇，考查化归与转化的数学思想.**

令 $x=0$，得 $b\in[0,2]$. 当 $x>0$ 且 $b=2$ 时，$3x^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{x}\leqslant a\leqslant 2x$，不存在 $a$，使得该不等式恒成立. 当 $x\in(0,+\infty)$，且 $b\in(0,2)$ 时，由 $3x^{\frac{2}{3}}\leqslant ax+b$，得 $a\geqslant 3x^{-\frac{1}{3}}-\frac{b}{x}$.

设 $g(x)=3x^{-\frac{1}{3}}-\frac{b}{x}$，则 $g'(x)=-x^{-\frac{4}{3}}+\frac{b}{x^2}=\frac{-x^{\frac{2}{3}}+b}{x^2}$，

得 $g(x)$ 在 $(0,b^{\frac{3}{2}})$ 上单调递增，在 $(b^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 上单调递减，

$g(x)_{\max}=g(b^{\frac{3}{2}})=\frac{2}{\sqrt{b}}$，得 $a\geqslant\frac{2}{\sqrt{b}}$.

$ax+b\leqslant 2x^2+2$ 等价于 $a\leqslant 2x+\frac{2-b}{x}$，而 $2x+\frac{2-b}{x}\geqslant 2\sqrt{2x\cdot\frac{2-b}{x}}=2\sqrt{2(2-b)}$，

所以 $a\leqslant 2\sqrt{2(2-b)}$，则 $\frac{2}{\sqrt{b}}\leqslant 2\sqrt{2(2-b)}$，

解得 $\frac{2-\sqrt{2}}{2}\leqslant b\leqslant\frac{2+\sqrt{2}}{2}$，所以 $b$ 的最大值是 $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

17. (1)证明：连接 $C_1D$. ………………………………………… 1分

在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD/\!/B_1C_1$，则 $A,B_1,C_1,D$ 四点共面，………… 2分

所以 $E\in$ 平面 $AB_1C_1D$. ………………………………………… 3分

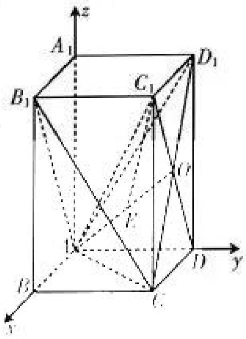
因为侧面 $CC_1D_1D$ 为矩形，且 $O$ 为 $CD_1$ 的中点，

所以 $C_1D\cap CD_1=O$，所以 $O$ 为平面 $AB_1C_1D$ 与平面 $ACD_1$ 的一个公共点，………… 4分

所以平面 $AB_1C_1D\cap$ 平面 $ACD_1=AO$，即平面 $AB_1C_1\cap$ 平面 $ACD_1=AO$，………… 5分

故 $E\in AO$. ………………………………………… 6分

(2)解：以 $A$ 为坐标原点，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 $x,y,z$ 轴的正方向，建立空间直角坐标系，如图所示. 设 $AB=AD=t$，其中 $t>0$，则




$B_1(t,0,4)$，$C(t,t,0)$，$C_1(t,t,4)$，$E(\frac{t}{4},\frac{t}{2},1)$，………………… 8分

$\overrightarrow{B_1C}=(0,t,-4)$，$\overrightarrow{C_1E}=(-\frac{3t}{4},-\frac{t}{2},-3)$，所以 $\overrightarrow{B_1C}\cdot\overrightarrow{C_1E}=-\frac{1}{2}t^2+12=6$，解得 $t=2\sqrt{3}$. ………………………………………… 10分

所以正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的侧面积为 $4AB\cdot AA_1=4\times2\sqrt{3}\times4=32\sqrt{3}$. ………………………………………… 12分

评分细则：

【1】第(1)问中，必须展示作辅助线的过程，仅在图中体现辅助线但过程中无体现的扣1分；$A,B_1,C_1,D$ 四点共面是证明第一问的关键，不写清楚四点共面的过程要扣1分.

【2】第(2)问中，建立空间直角坐标系的形式不唯一，只要建系合理，点的坐标计算正确均可.

第(2)问的另一种解法如下：

$\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1})=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}$，………………………… 7分

$\overrightarrow{C_1E}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD_1})-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$，………………………… 9分

$\overrightarrow{B_1C}\cdot\overrightarrow{C_1E}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1})\cdot(-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2+\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}^2=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2+12$. ………………………………………… 10分

由 $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2+12=6$，解得 $|\overrightarrow{AD}|=2\sqrt{3}$，即 $AD=2\sqrt{3}$，……………………………… 11分

所以正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的侧面积为 $4AD\cdot AA_1=4\times2\sqrt{3}\times4=32\sqrt{3}$. … 12分

18. (1)证明：因为 $\begin{pmatrix} n & 1\\ 1 & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} na_n+b_n\\ a_n+nb_n\end{pmatrix}$，………………………………………… 2分

所以$\begin{cases}na_n+b_n=n^2+2^n,\\a_n+nb_n=n(2^n+1),\end{cases}$ 所以$\begin{cases}na_n+b_n=n^2+2^n,\\na_n+n^2b_n=n^2(2^n+1).\end{cases}$

两式相减得$(n^2-1)b_n=(n^2-1)2^n$. ………………………………………… 3 分

当$n\geqslant 2$时,$b_n=2^n$,$a_n=n$; ………………………………………… 4 分

当$n=1$时,由$na_n+b_n=n^2+2^n$及$a_1=1$,得$b_1=2=2^1$,

所以$\begin{cases}a_n=n,\\b_n=2^n.\end{cases}$ ………………………………………… 5 分

因为$a_{n+1}-a_n=1$,$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$,所以$\{a_n\}$,$\{b_n\}$分别为等差数列,等比数列. ……………… 7 分

(2)解:由(1)知$a_{2n}+3b_{2n-1}+1=2n+1+3\times 2^{2n-1}$, ………………………… 8 分

则$S_n=(3+5+\cdots+2n+1)+3\times(2+2^3+\cdots+2^{2n-1})$ ………………………… 9 分

$=\dfrac{(3+2n+1)n}{2}+3\times\dfrac{2(1-4^n)}{1-4}=2\times 4^n+n^2+2n-2$. ………………………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问中,通过联立方程组$\begin{cases}na_n+b_n=n^2+2^n,\\na_n+n^2b_n=n^2(2^n+1),\end{cases}$直接得到$\begin{cases}a_n=n,\\b_n=2^n,\end{cases}$要扣1分.

【2】第(2)问中,最后的结果写为$2^{2n+1}+n^2+2n-2$,不扣分.

19. 解:(1)由图可知$f(x)$的图象与$x$轴切于原点. ………………………………… 1 分

因为$f'(x)=ae^x+b$,所以$f'(0)=a+b=0$. ………………………………… 2 分

又$f(0)=a-2=0$,所以$a=2$, ………………………………… 3 分

所以$b=-2$,$f(x)$的解析式为$f(x)=2e^x-2x-2$. ………………………………… 4 分

(2)由$f(x)+f(2x)>6x-m$对$x\in\mathbf{R}$恒成立,得$m<f(x)+f(2x)-6x$对$x\in\mathbf{R}$恒成立.

………………………………………………………………… 5 分

设函数$g(x)=f(x)+f(2x)-6x=2e^{2x}+2e^x-12x-4$,

则$g'(x)=4e^{2x}+2e^x-12=2(2e^x-3)(e^x+2)$. ………………………………… 6 分

令$g'(x)=0$,得$x=\ln\dfrac{3}{2}$. ………………………………………… 7 分

令$g'(x)<0$,得$x<\ln\dfrac{3}{2}$;令$g'(x)>0$,得$x>\ln\dfrac{3}{2}$. ……………………………… 8 分

所以$g(x)$在$(-\infty,\ln\dfrac{3}{2})$上单调递减,在$(\ln\dfrac{3}{2},+\infty)$上单调递增. ……………………… 9 分

所以$g(x)_{\min}=g(\ln\dfrac{3}{2})=\dfrac{7}{2}-12\ln\dfrac{3}{2}$, ………………………………… 11 分

所以$m<\dfrac{7}{2}-12\ln\dfrac{3}{2}$,即$m$的取值范围是$(-\infty,\dfrac{7}{2}-12\ln\dfrac{3}{2})$. ……………………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问中,未写“由图可知$f(x)$的图象与$x$轴切于原点”,但是写了“$f'(0)=f(0)=0$”,不扣分.

【2】第(2)问中，最后得到 $m<\frac{7}{2}-12\ln\frac{3}{2}$，但是没有写成区间形式，不扣分.

20. (1)解：因为 $c^2,a^2,b^2$ 成等差数列，所以 $2a^2=c^2+b^2$， ………………………… 1 分

又 $c^2=a^2+b^2$，所以 $a^2=2b^2$. ………………………… 2 分

将点 $(3,\frac{\sqrt{6}}{2})$ 的坐标代入 $C$ 的方程得 $\frac{9}{2b^2}-\frac{\frac{6}{4}}{b^2}=1$，解得 $b^2=3$， ………………………… 3 分

所以 $a^2=6$，所以 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$. ………………………… 4 分

(2)证明：依题意可设 $PQ:x=my+3$， ………………………… 5 分

由 $\begin{cases}x=my+3,\\ \frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(m^2-2)y^2+6my+3=0$. ………………………… 6 分

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$y_1>y_2$，则 $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-6m}{m^2-2},\\ y_1y_2=\frac{3}{m^2-2}.\end{cases}$ ………………………… 7 分

$M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$，$N(2,\frac{y_1+y_2}{2})$，

则 $k_1-k_2=k_{PN}-k_{QN}=\frac{\frac{y_1-y_2}{2}}{x_1-2}-\frac{\frac{y_2-y_1}{2}}{x_2-2}=\frac{\frac{y_1-y_2}{2}}{my_1+1}-\frac{\frac{y_2-y_1}{2}}{my_2+1}=\frac{(y_1-y_2)[m(y_1+y_2)+2]}{2[m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1]}$，

………………………… 9 分

而 $S=\frac{1}{2}|OF|\cdot(y_1-y_2)=\frac{3}{2}(y_1-y_2)$. ………………………… 10 分

所以 $\frac{k_1-k_2}{S}=\frac{m(y_1+y_2)+2}{3[m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1]}=\frac{\frac{-6m^2}{m^2-2}+2}{3(\frac{3m^2}{m^2-2}+\frac{-6m^2}{m^2-2}+1)}=\frac{-4m^2-4}{-6m^2-6}=\frac{2}{3}$，

所以 $\frac{k_1-k_2}{S}$ 是定值. ………………………… 12 分

评分细则：来源：高三答案公众号

【1】第(2)问中，用 $PQ$ 作为底边，$O$ 到直线 $PQ$ 的距离 $d$ 为高，$S=\frac{1}{2}d\times|PQ|$，得到 $S=\frac{3}{2}(y_1-y_2)$，不扣分.

【2】第(2)问还可以这样解答：

当直线 $PQ$ 的斜率不存在时，$PQ:x=3$，$P(3,\frac{\sqrt{6}}{2})$，$Q(3,-\frac{\sqrt{6}}{2})$，$N(2,0)$，

$\frac{k_1-k_2}{S}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}-(-\frac{\sqrt{6}}{2})}{\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{6}}=\frac{2}{3}$. ………………………… 5 分

当直线 $PQ$ 的斜率存在时，设 $PQ:y=k(x-3)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$y_1>y_2$.

由 $\begin{cases} y=k(x-3), \\ \dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $(1-2k^2)x^2+12k^2x-18k^2-6=0$，…………………………… 6 分

则 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-12k^2}{1-2k^2}, \\ x_1x_2=\dfrac{-18k^2-6}{1-2k^2}. \end{cases}$ …………………………………………………… 7 分

$M(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})$，$N(2,\dfrac{y_1+y_2}{2})$.

$k_1-k_2=\dfrac{\frac{y_1-y_2}{2}}{x_1-2}-\dfrac{\frac{y_2-y_1}{2}}{x_2-2}=\dfrac{\frac{y_1-y_2}{2}}{x_1-2}+\dfrac{\frac{y_1-y_2}{2}}{x_2-2}=\dfrac{(y_1-y_2)(x_1+x_2-4)}{2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]}$，………… 9 分

而 $S=\dfrac{1}{2}\cdot|OF|\cdot(y_1-y_2)=\dfrac{3}{2}(y_1-y_2)$，……………………………………… 10 分

所以 $\dfrac{k_1-k_2}{S}=\dfrac{x_1+x_2-4}{3[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]}=\dfrac{\frac{-12k^2}{1-2k^2}-4}{3(\frac{-18k^2-6}{1-2k^2}+\frac{24k^2}{1-2k^2}+4)}=\dfrac{\frac{-4(k^2+1)}{1-2k^2}}{\frac{6(k^2+1)}{1-2k^2}}=-\dfrac{2}{3}$，

所以 $\dfrac{k_1-k_2}{S}$ 是定值. ……………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1) $X$ 的可能取值为 2，3，4，则 $P(X=2)=\dfrac{C_3^2}{C_3^2C_5^2}=0.1$，……………………………… 1 分

$P(X=3)=\dfrac{C_3^2C_3^1C_2^1}{C_3^2C_5^2}=0.6$，$P(X=4)=\dfrac{C_3^2C_3^2}{C_3^2C_5^2}=0.3$. ………………………………………… 2 分

则 $X$ 的分布列为

| $X$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.1 | 0.6 | 0.3 |

……………………………………………………………………………………………… 3 分

$E(X)=2\times0.1+3\times0.6+4\times0.3=3.2$（或 $\dfrac{16}{5}$）. …………………………………… 4 分

(2) 设食品药品监督管理部门邀请的代表记为集合 $A$，人数为 $m=\mathrm{Card}(A)$，卫生监督管理部门邀请的代表为集合 $B$，人数为 $n=\mathrm{Card}(B)$，则收到两个部门邀请的代表的集合为 $A\cup B$，人数为 $\mathrm{Card}(A\cup B)$.

设参加会议的群众代表的人数为 $Y$，则 $Y=\mathrm{Card}(A\cup B)$. ………………………………… 5 分

若 $\mathrm{Card}(A\cup B)=k$，则 $\mathrm{Card}(A\cap B)=m+n-k$，

则 $P(Y=k)=\dfrac{C_{100}^{m}C_{100-m}^{k-m}C_{m}^{m+n-k}}{C_{100}^{m}C_{100}^{n}}=\dfrac{C_{100-m}^{k-m}C_{m}^{k-n}}{C_{100}^{n}}$，……………………………… 7 分

$P(Y=k+1)=\dfrac{C_{100-m}^{k+1-m}C_{m}^{k+1-n}}{C_{100}^{n}}$，

$\frac{P(Y=k+1)}{P(Y=k)}=\frac{C_{100-m}^{k+1-m}C_{m}^{k+1-n}}{C_{100-m}^{k-m}C_{m}^{k-n}}=\frac{(m+n-k)(100-k)}{(k+1-m)(k+1-n)}$. …………………………………… 8 分

令 $P(Y=k+1)\leqslant P(Y=k)$，得 $\frac{P(Y=k+1)}{P(Y=k)}\leqslant 1$，解得 $k\geqslant\frac{101(m+n)-mn-1}{102}$，……… 9 分

以 $k-1$ 代替 $k$，得 $\frac{P(Y=k)}{P(Y=k-1)}=\frac{(m+n+1-k)(101-k)}{(k-m)(k-n)}$，

令 $P(Y=k-1)\leqslant P(Y=k)$，得 $\frac{P(Y=k)}{P(Y=k-1)}\geqslant 1$，

令 $P(Y=k-1)\leqslant P(Y=k)$，得 $\frac{P(Y=k+1)}{P(Y=k)}\leqslant 1$，解得 $k\leqslant\frac{101(m+n)-mn-1}{102}+1$，………
…………………………………………………………………………………… 10 分

所以 $\frac{101(m+n)-mn-1}{102}\leqslant k\leqslant\frac{101(m+n)-mn-1}{102}+1$. 

若 $\frac{101(m+n)-mn-1}{102}$ 为整数，则当 $k=\frac{101(m+n)-mn-1}{102}$ 或 $k=\frac{101(m+n)-mn-1}{102}+1$ 时，$P(Y=k)$ 取得最大值，所以估计参加会议的群众代表的人数为 $\frac{101(m+n)-mn-1}{102}$ 或 $\frac{101(m+n)-mn-1}{102}+1$；…………………………………………………… 11 分

若 $\frac{101(m+n)-mn-1}{102}$ 不是整数，则当 $k=\left\lfloor\frac{101(m+n)-mn-1}{102}\right\rfloor+1$ 时，$P(Y=k)$ 取得最大值，所以估计参加会议的群众代表的人数为 $\left\lfloor\frac{101(m+n)-mn-1}{102}\right\rfloor+1$，其中，$\left\lfloor\frac{101(m+n)-mn-1}{102}\right\rfloor$ 表示不超过 $\frac{101(m+n)-mn-1}{102}$ 的最大整数. ………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问中，$P(X=4)=1-0.1-0.6=0.3$，不扣分.

【2】第(2)问中，未写“$Y=\mathrm{Card}(A\cup B)$”，但是，得到 $P(Y=k)=\frac{C_{100}^{m}C_{100-m}^{k-m}C_{m}^{m+n-k}}{C_{100}^{m}C_{100}^{n}}=\frac{C_{100-m}^{k-m}C_{m}^{k-n}}{C_{100}^{n}}$，不扣分. 最后一行中的“最大整数”写为“整数部分”，不扣分.

22. 解：(1) 圆 $C$ 的普通方程为 $(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=1$，…………………………………… 1 分

即 $x^2+y^2-\sqrt{3}x+y=0$，…………………………………………………………………… 2 分

则 $\rho^2-\sqrt{3}\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=0$，…………………………………………………… 3 分

所以圆 $C$ 的极坐标方程为 $\rho=\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=2\cos(\theta+\frac{\pi}{6})$. ………………………… 4 分

(2) 不妨设 $A(\rho_1,\theta)$，$B(\rho_2,\theta+\frac{\pi}{6})$，$0\leqslant\theta<2\pi$，则 $\rho_1=2\cos(\theta+\frac{\pi}{6})$，$\rho_2=2\cos(\theta+\frac{\pi}{3})$，………
…………………………………………………………………………………… 6 分

则 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin\frac{\pi}{6}=\cos(\theta+\frac{\pi}{6})\cos(\theta+\frac{\pi}{3})=\frac{\cos(2\theta+\frac{\pi}{2})+\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\sqrt{3}-2\sin 2\theta}{4}$. …………………………………………………………………………………… 9 分

当 $\sin 2\theta=-1$ 时，$\triangle AOB$ 的面积取得最大值，且最大值为 $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$. ……………………… 10 分

评分细则：

【1】第(1)问中，得到的极坐标方程写为 $\rho=\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta$，不扣分.

【2】第(2)问还可以这样解答：

依题意可得圆 $C$ 是 $\triangle AOB$ 的外接圆，由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\angle AOB}=2\times1$，

所以 $AB=1$. ……………………………………………………………………………… 6 分

由余弦定理得 $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\angle AOB$， ………………………………… 7 分

即 $1=OA^2+OB^2-\sqrt{3}OA\cdot OB\geqslant 2OA\cdot OB-\sqrt{3}OA\cdot OB=(2-\sqrt{3})OA\cdot OB$， ……… 8 分

所以 $OA\cdot OB\leqslant 2+\sqrt{3}$，当且仅当 $OA=OB$ 时，等号成立， ………………………………… 9 分

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{2+\sqrt{3}}{4}$，故 $\triangle AOB$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$. ………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)=|x^2-2x-3|+|x^2-2x-8|\geqslant|x^2-2x-3-(x^2-2x-8)|=5$， ……… 2 分

当且仅当 $(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)\leqslant 0$，即 $3\leqslant x^2-2x\leqslant 8$ 时，等号成立， ……………… 3 分

所以 $f(x)$ 的最小值为 5， ……………………………………………………………… 4 分

此时 $x$ 的取值集合为 $[-2,-1]\cup[3,4]$. …………………………………………………… 5 分

(2) 令 $t=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$，则 $f(x)=|t-4|+|t-9|>19$， ……………………… 6 分

得 $\begin{cases}t<4,\\4-t+9-t>19\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4\leqslant t\leqslant 9,\\t-4+9-t>19\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t>9,\\t-4+t-9>19,\end{cases}$ ……………………………… 8 分

解得 $t<-3$ 或 $t>16$. ………………………………………………………………………… 9 分

因为 $t\geqslant 0$，所以 $(x-1)^2>16$，所以 $x\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$，

所以不等式 $f(x)>19$ 的解集为 $(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$. ………………………………… 10 分

评分细则：

【1】第(1)问中，最后未写"$x$ 的取值集合为 $[-2,-1]\cup[3,4]$"，而写为"$-2\leqslant x\leqslant -1$ 或 $3\leqslant x\leqslant 4$"，扣 1 分，写为"$x\in[-2,-1]\cup[3,4]$"，不扣分.

【2】第(1)问还可以这样解答：

设 $t=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$，则 $f(x)=|t-4|+|t-9|\geqslant|t-4-(t-9)|=5$， …… 2 分

当且仅当 $t\in[4,9]$ 时，等号成立， ……………………………………………………… 3 分

所以 $f(x)$ 的最小值为 5， ………………………………………………………………… 4 分

此时 $(x-1)^2\in[4,9]$，即 $x\in[-2,-1]\cup[3,4]$. …………………………………………… 5 分

【3】第(2)问还可以分 5 段讨论解不等式，阅卷时请按步骤给分.

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。