2017 年全国高中数学联赛河南省预赛高一试题

(考试时间:2017 年 5 月 14 日上午 8:30 – 11:00)

市________ 县(区)________ 学校________ 姓名________ 准考证号________

密 封 线 内 不 准

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	总分
得分						
评卷人						
复查人						

考生注意:1.本试卷共五道大题,满分 140 分.

2.解答书写时不要超过密封线.

一.填空题(共 8 小题,每小题 8 分,满分 64 分)

得分	
评卷人	

1.已知元素为实数的集合 S 满足下列条件:若 $a\in S$,则 $\dfrac{1}{1-a}\in S$.若 $2\in S$,则集合 S 中至少有______个元素.

2.已知函数 $f(x)=x^5+a\sin^3x+b\sin x\cos x+cx+4$,且满足 $f(-2017)=2$,则 $f(2017)=$__________.

3.已知实数 x,y 满足:$(1+9^{2x-y})\cdot 10^{1-2x+y}=1+3^{2x-y+1}$,则 $4x^2-4xy+2y$ 的最大值为________.

4.已知点 P 是 ΔABC 所在平面外的一点,并且 PA,PB,PC 两两垂直,$PH\perp$ 面 ABC 于 H.若 $PA=\dfrac{1}{3},PB=\dfrac{1}{4},PC=\dfrac{1}{5}$,则 $PH=$______________.

5.已知托勒密定理的逆定理:如果凸四边形两条对角线的乘积等于两组对边乘积之和,则该四边形四个顶点共圆.利用此定理解决下述问题:已知 $A(0,3),B(-\sqrt{3},0),C(\sqrt{3},0)$,$P$ 是坐标平面上的点,且满足 $PA=PB+PC$,则点 P 的轨迹方程____________________.

6.对于$n\in N_{+}$,其二进制表示为$n=(\overline{a_k a_{k-1}\cdots a_0})_2$,其中,$a_k=1,a_i\in\{0,1\},i=0,1,\cdots,k-1$.定义$b_n$如下:在上述表示中,当$a_0,a_1,\cdots,a_k$中等于1的个数为奇数时,$b_n=1$;否则$b_n=0$.记$c_m$为数列$\{b_n\}$中第$m$个为0的项与第$m+1$个为0的项之间的项数,则$c_m$的最大值是____________.

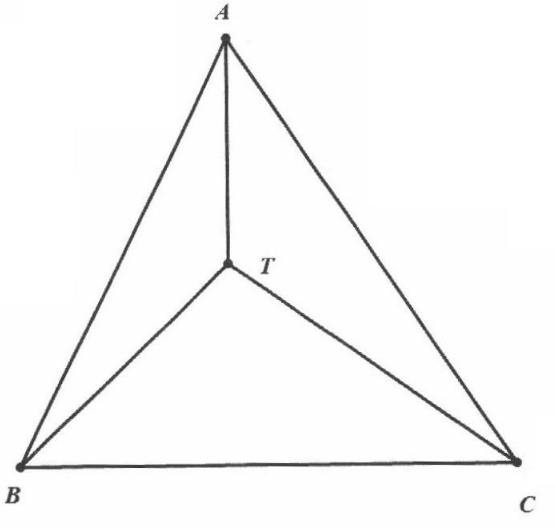
7.若实数x,y满足$\begin{cases}\dfrac{x}{\sin^2 20^\circ+2018}+\dfrac{y}{\sin^2 20^\circ-2017}=1\\ \dfrac{x}{\sin^2 70^\circ+2018}+\dfrac{y}{\sin^2 70^\circ-2017}=1\end{cases}$,则$x+y=$____________.

8.已知$\theta\in R$,且$\dfrac{\cos 3\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}$,则$\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=$____________.

得分	
评卷人	

二.**(本题满分 16 分)**如图所示,T 为 ΔABC 内的一点.

证明: $AT \perp BC \Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = TB^2 - TC^2$.



得分	
评卷人	

三.(本题满分 20 分)已知函数 $h(x)=\left(\dfrac{1-x^{p}}{1+\lambda x^{p}}\right)^{\frac{1}{p}}(\lambda>-1,p>0)$.

(1)对任意 $a\in[0,1]$,求 $h(h(a))$;

(2)当 $\lambda=0,x\in(0,1)$ 时,函数 $y=h(x)$ 的图像总在直线 $y=1-x$ 的上方,求实数 p 的取值范围.

得分	
评卷人	

四.(本题满分 20 分)已知正实数 x,y,z 满足: $x^2+y^2+z^2=4$.

(1)证明存在锐角 α,β 满足:

$x=2\sin\alpha\cos\beta, y=2\cos\alpha\cos\beta, z=2\sin\beta$;

(2)证明: $\frac{2\sqrt{6}}{3}xy+yz+zx\le 2\sqrt{6}$.

得分	
评卷人	

五.(本题满分 20 分)已知集合 $A=\{x\mid x=m^2-n^2,m,n\in Z\}$.

(1)求证: $2k+1\in A(k\in Z)$;

(2)判断 $4k-2(k\in Z)$ 是否属于 A;

(3)试求 A 中的第2017 个正整数(从小到大数).