

高三数学考试参考答案

1. D 【解析】本题考查等差数列,考查数学运算的核心素养.

因为公差 $d = \frac{a_9 - a_3}{9 - 3} = \frac{1 - 13}{6} = -2$, 所以 $a_4 = a_3 + d = 11$.

2. D 【解析】本题考查集合的交集,考查数学运算的核心素养.

因为 $A = (-3, 2)$, $B = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, 所以 $A \cap B = (-3, 0) \cup (1, 2)$.

3. A 【解析】本题考查空间中的垂直关系,考查空间想象能力与逻辑推理的核心素养.

当四面体 $ABCD$ 为正四面体时, AB 与 CD 垂直, A 正确, C 错误. 若 A 在平面 BCD 内的射影是 B , 则 AB 与平面 BCD 垂直, B 错误. 平面 ABC 与平面 BCD 可能垂直, D 错误.

4. C 【解析】本题考查函数的奇偶性,考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.

设 $g(x) = f(2^x - 2^{-x})$, 则 $g(-x) = f(2^{-x} - 2^x) = -f(2^x - 2^{-x}) = -g(x)$, 则 $y = f(2^x - 2^{-x})$ 是奇函数.

5. B 【解析】本题考查平面向量的数量积,考查数学运算的核心素养.

依题意可得 $(a + \frac{1}{2}b) \cdot (a - 7b) = a^2 - \frac{13}{2}a \cdot b - \frac{7}{2}b^2 = 0$, 则 $a \cdot b = -\frac{5}{13}$.

6. A 【解析】本题考查导数的几何意义及直线与圆,考查数学运算与直观想象的核心素养.

$y' = 4x^3$, 则 l 的方程为 $y - 1 = 4(x - 1)$, 即 $y = 4x - 3$, 因为圆心 $C(5, 0)$ 到 l 的距离为 $\sqrt{17}$, 所以 $|PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{17} - \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

7. C 【解析】本题考查解三角形与充分必要条件的判定,考查逻辑推理的核心素养.

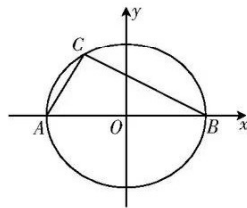
由正弦定理, 题中的不等式等价于 $(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) > 0$. 假设 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 则由余弦定理得 $a^2 + b^2 - c^2, b^2 + c^2 - a^2, c^2 + a^2 - b^2$ 这三个代数式中有两个为正, 一个为负, 可得 $(a^2 + b^2 - c^2) \cdot (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) < 0$, 所以 $\triangle ABC$ 为锐角三角形. 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 则 $a^2 + b^2 - c^2, b^2 + c^2 - a^2, c^2 + a^2 - b^2$ 这三个代数式均为正, 所以 $(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) > 0$. 故 “ $(\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C)(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)(\sin^2 C + \sin^2 A - \sin^2 B) > 0$ ” 是 “ $\triangle ABC$ 为锐角三角形” 的充要条件.

8. D 【解析】本题考查椭圆的性质,考查直观想象与数学运算的核心素养.

设椭圆 D 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 如图, 点 C 的横坐标为 $-\left(\frac{7}{2} - 3\cos 60^\circ\right) = -2$, 纵坐标为 $3\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 因为 $AB = 7$, 所以 $a = \frac{7}{2}$,

将点 C 的坐标代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 得 $\frac{16}{49} + \frac{27}{4b^2} = 1$, 解得 $b^2 = \frac{9 \times 49}{44}$,

故 $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{11}} = \frac{\sqrt{22}}{11}$.



9. BD 【解析】本题考查抛物线的定义(焦半径),考查直观想象与数学运算的核心素养.

设焦点为 F , 则 $|MF| = 2 + \frac{p}{2} = 8|2p + 1 - 2|$, 解得 $p = \frac{4}{11}$ 或 $\frac{20}{31}$.

10. AC 【解析】本题考查圆锥的侧面积与基本不等式的应用,考查逻辑推理与数学建模的核心素养.

设 $AB = x$, $AD = y$, 则圆锥 M 的侧面积为 $2\pi x$, 圆锥 N 的侧面积为 $8\pi y$, 则 $2\pi x + 8\pi y = xy$,

则 $\frac{1}{y} + \frac{4}{x} = \frac{1}{2\pi}$, 则 $\frac{1}{y} + \frac{4}{x} = \frac{1}{2\pi} \geq 2\sqrt{\frac{1}{y} \cdot \frac{4}{x}}$, 得 $xy \geq 64\pi^2$, 当且仅当 $\frac{1}{y} = \frac{4}{x}$, 即 $x = 4y$, $AB = 4AD$ 时, 等号成立, 所以矩形 $ABCD$ 的面积的最小值为 $64\pi^2$, 此时 $AB = 4AD$, 所以 B 错误, C 正确.

矩形 $ABCD$ 的周长为 $2(x + y) = 4\pi\left(\frac{1}{y} + \frac{4}{x}\right)(x + y) = 4\pi\left(5 + \frac{x}{y} + \frac{4y}{x}\right) \geq 4\pi\left(5 + 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{4y}{x}}\right) = 36\pi$,

当且仅当 $\frac{x}{y} = \frac{4y}{x}$, 即 $x=2y$, $AB=2AD$ 时, 等号成立, 所以矩形 $ABCD$ 的周长的最小值为 36π , 此时 $AB=2AD$, 所以 A 正确, D 错误.

11. ABD 【解析】本题考查三角恒等变换与解三角形, 考查直观想象与数学运算的核心素养.

设 $\angle BAC = \theta$, 则 $\theta + 2\theta + 2\theta = 180^\circ$, 解得 $\theta = 36^\circ$, 则 $\angle DAC = 18^\circ$,

则 $\cos \angle DAC = \cos 18^\circ = \cos(360^\circ - 18^\circ) = \cos 342^\circ = \frac{AD}{AC}$, A 正确.

$\frac{AD}{CD} = \tan 2\theta = \tan 72^\circ$, $\frac{\cos 27^\circ + \sin 27^\circ}{\cos 27^\circ - \sin 27^\circ} = \frac{1 + \tan 27^\circ}{1 - \tan 27^\circ} = \tan(27^\circ + 45^\circ) = \tan 72^\circ$, B 正确.

依题意可设 $BC = \sqrt{5} - 1$, 则 $AB = AC = 2$, 则由余弦定理得 $\cos \angle BAC = \frac{2^2 + 2^2 - (\sqrt{5} - 1)^2}{2 \times 2 \times 2} =$

$\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$, 过 B 作 $BE \perp AC$, 垂足为 E, 则 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{AE} = \cos \angle BAC \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \overrightarrow{AC}$, C 错误.

由图可知 $\cos 2\theta = \cos(\pi - \theta - 2\theta)$, 则 $2\cos^2 \theta - 1 = -\cos(\theta + 2\theta) = -\cos \theta \cos 2\theta + \sin \theta \sin 2\theta = -\cos \theta (2\cos^2 \theta - 1) + 2\sin^2 \theta \cos \theta$, 设 $\cos \theta = x$, 则 $2x^2 - 1 = -x(2x^2 - 1) + 2(1 - x^2)x$, 整理得 $4x^3 + 2x^2 - 3x = 1$, D 正确.

12. ACD 【解析】本题考查函数与导数的综合, 考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.

因为 $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $f(xy) = 2f(x)f(y) - x^2y^2$, 所以 $f(x)$ 的解析式可能为 $f(x) = x^2$, 也可能为 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$, 所以 A, C 都正确.

若 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$, 则 $g'(x) = \frac{x^2 - 2x}{2e^x}$, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 所以 B 错误.

若 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$, 则 $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \sin x$, 则 $h'(x) = -x + \cos x$, $h'(x)$ 的导函数 $h''(x) = -1 - \sin x \leq 0$,

所以 $h'(x)$ 单调递减, 因为 $h'(0)h'(\frac{\pi}{2}) < 0$, 所以存在唯一的 $m \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $h'(m) = 0$, 则当 $x < m$ 时, $h(x)$ 单调递增, 当 $x > m$ 时, $h(x)$ 单调递减. 因为 $h(0) = 0$, $h(2) < 0$, 所以 $h(x) = f(x) + \sin x$ 可能只有两个非负零点, D 正确.

13. $3 + 2i$ (本题答案不唯一, 只要 $a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ 满足 $a^2 - b^2 = 5, b \neq 0$ 即可, 例如 $3 - 2i$) 【解析】本题考查复数的实部、虚部与复数的运算, 考查数学运算的核心素养.

设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 则 $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, 依题意可得 $a^2 - b^2 = 5, b \neq 0$.

14. 2; 1.2 【解析】本题考查随机变量的期望与方差, 考查数学运算的核心素养.

$E(X) = (1+2) \times 0.4 + 4 \times 0.2 = 2$, $D(X) = (1-2)^2 \times 0.4 + (2-2)^2 \times 0.4 + (4-2)^2 \times 0.2 = 1.2$.

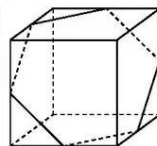
15. $\frac{41}{120}$ 【解析】本题考查古典概型与排列组合的应用, 考查应用意识与逻辑推理的核心素养.

要使得 $(2, 3)$ 的状态发生改变, 则需要按 $(1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3)$ 这五个开关中的一个, 要使得 $(4, 1)$ 的状态发生改变, 则需要按 $(3, 1), (4, 1), (4, 2)$ 这三个开关中的一个, 所以要使得 $(2, 3)$ 和 $(4, 1)$ 的最终状态都未发生改变, 则需按其他八个开关中的两个或 $(1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3)$ 中的两个或 $(3, 1), (4, 1), (4, 2)$ 中的两个, 故所求概率为 $\frac{A_5^2 + A_3^2 + A_3^2}{A_8^2} = \frac{41}{120}$.

16. 108 【解析】本题考查翻折问题、多面体的体积, 考查空间想象能力、直观想象与数学运算的核心素养.

将平面图形折叠并补形得到如图(3)所示的正方体, 该七面体为正方体沿着图中的六边形截

面截去一部分后剩下的另一部分, 易得其体积为正方体体积的一半, 即 $\frac{1}{2} \times 6^3 = 108 \text{ cm}^3$.



17. 解: (1) 取 C_1C 的中点 H ,

连接 A_1B, A_1G, BH, GH , 即截面 BA_1GH 为要求作的截面. 1 分

图(3)

理由如下:

因为 E, F 分别为 A_1B_1, BB_1 的中点, 所以 $A_1B \parallel EF$, 又 $A_1B \not\subset$ 平面 C_1EF , $EF \subset$ 平面 C_1EF , 所以 $A_1B \parallel$ 平面 C_1EF 2 分

在正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中, 因为 G 为 C_1D_1 的中点, 所以 $A_1E \parallel GC_1$, 且 $A_1E = GC_1$,

所以四边形 A_1EC_1G 为平行四边形, 所以 $A_1G \parallel EC_1$, 同上可得 $A_1G \parallel$ 平面 C_1EF 3 分

又 $A_1B \cap A_1G = A_1$, 所以平面 $BA_1G \parallel$ 平面 C_1EF 4 分

连接 D_1C , 易证 $GH \parallel D_1C$, $A_1B \parallel D_1C$, 则 $GH \parallel A_1B$,

所以 A_1, B, H, G 四点共面, 从而截面 BA_1GH 为要求作的截面. 5 分

(2) 如图, 以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系, 则 $D(0, 0, 0), C_1(0, 2, 2), E(2,$

$1, 2), F(2, 2, 1),$

$\overrightarrow{EC_1} = (-2, 1, 0), \overrightarrow{EF} = (0, 1, -1), \overrightarrow{DE} = (2, 1, 2).$ 6 分

设平面 C_1EF 的法向量为 $m = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{EC_1} \cdot m = -2x + y = 0, \\ \overrightarrow{EF} \cdot m = y - z = 0, \end{cases}$ 7 分

令 $x = 1$, 得 $m = (1, 2, 2)$, 8 分

所以 $\cos \langle \overrightarrow{DE}, m \rangle = \frac{\overrightarrow{DE} \cdot m}{|\overrightarrow{DE}| |m|} = \frac{8}{9}$ 9 分

故直线 DE 与平面 C_1EF 所成角的正弦值为 $\frac{8}{9}$ 10 分

评分细则:

【1】第(1)问中, 若得到的截面为 $\triangle A_1BG$, 且证明了截面 $A_1BG \parallel$ 平面 C_1EF , 第(1)问只得 3 分.

【2】第(2)问中, 平面 C_1EF 的法向量不唯一, 只要与 $m = (1, 2, 2)$ 共线即可.

18. 解: (1) 依题意可得 $\begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{3}, \\ \pi\omega + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbf{Z}),$ 2 分

解得 $1 + 12k \leq \omega \leq \frac{7}{6} + 2k (k \in \mathbf{Z}).$ 3 分

当 $k = 0$ 时, $1 \leq \omega \leq \frac{7}{6}$; 4 分

当 $k \geq 1$ 时, 不等式 $1 + 12k \leq \omega \leq \frac{7}{6} + 2k$ 无解. 5 分

故 ω 的最大值为 $\frac{7}{6}$ 6 分

(2) 因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ 中心对称, 所以 $\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z}).$ 8 分

因为 $1 \leq \omega \leq \frac{7}{6}$, 所以 $\omega = \frac{10}{9},$ 9 分

则 $f(x) = 4\sin(\frac{10}{9}x + \frac{\pi}{3})$, 当 $x \in [-\frac{9\pi}{20}, m]$ 时, $\frac{10}{9}x + \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{10}{9}m + \frac{\pi}{3}],$ 10 分

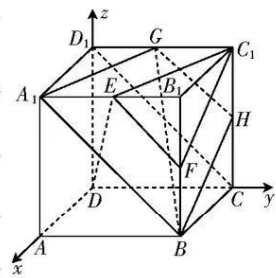
则 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{10}{9}m + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6},$ 11 分

解得 $\frac{3\pi}{20} \leq m \leq \frac{3\pi}{4}$, 所以 m 的取值范围是 $[\frac{3\pi}{20}, \frac{3\pi}{4}].$ 12 分

评分细则:

【1】第(1)问中, 得到 $1 + 12k \leq \omega \leq \frac{7}{6} + 2k (k \in \mathbf{Z})$ 后, 还可以由 $\frac{\pi}{\omega} \geq \pi - \frac{\pi}{6}$, 得 $0 < \omega \leq \frac{6}{5}$, 所以 $1 \leq \omega \leq \frac{7}{6}$, 故

ω 的最大值为 $\frac{7}{6}$.



【2】第(2)问中,若得到 $\frac{3\pi}{20} \leq m \leq \frac{3\pi}{4}$,但最后没有写成区间形式,不扣分.

19. 解:(1)由题意可知 $\{a_n\}$ 是公差为4的等差数列, 1分
因为 $a_1 = 49 - 2 \times 4 = 41$, 2分
所以 $a_n = 41 + 4(n-1) = 4n + 37 (n=1, 2, \dots, 10)$ 3分
观众座位的总个数为 $\frac{(41+40+37) \times 10}{2} = 590$ 4分
(2)设第 n 排座位的门票价格为 c_n 元/张,则 $\{c_n\}$ 为等比数列, 5分
 $c_n = c_1 \cdot (\frac{1}{1.1})^{n-1}$,由 $c_{10} = c_1 \cdot (\frac{1}{1.1})^9 = 500$,得 $c_1 = 500 \times 1.1^9$,
因此 $c_n = 500 \times 1.1^{10-n} (n=1, 2, \dots, 10)$ 6分
记门票售罄该场文艺演出的门票总收入为 T 元,则 $T = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \dots + a_{10} c_{10}$, $\frac{T}{500} = 41 \times 1.1^9 + 45 \times 1.1^8 + 49 \times 1.1^7 + \dots + 77 \times 1.1^0$, 7分
则 $\frac{T}{500 \times 1.1} = 41 \times 1.1^8 + 45 \times 1.1^7 + 49 \times 1.1^6 + \dots + \frac{77}{1.1}$, 8分
两式相减得 $\frac{T}{500} (1 - \frac{1}{1.1}) = 41 \times 1.1^9 + 4 \times (1.1^8 + 1.1^7 + \dots + 1.1^0) - 70$, 9分
则 $\frac{T}{11 \times 500} = 41 \times 1.1^9 + 4 \times \frac{1-1.1^{10}}{1-1.1} - 70 = 81 \times 1.1^9 - 110$, 10分
所以 $T = 81 \times 5000 \times 1.1^{10} - 110 \times 11 \times 500 = 81 \times 5000 \times 2.594 - 110 \times 11 \times 500 = 445570$,
故若门票售罄,则该场文艺演出的门票总收入为445570元. 12分
评分细则:

【1】第(1)问中,得到“ $\{a_n\}$ 是等差数列”,但未写公差,不扣分;未写“ $(n=1, 2, \dots, 10)$ ”,但得到“ $a_n = 4n + 37$ ”,不扣分.

【2】第(2)问中,得到“ $T = 81 \times 5000 \times 1.1^{10} - 110 \times 11 \times 500 = 81 \times 5000 \times 2.594 - 110 \times 11 \times 500 = 445570$ ”,但未写“故该场文艺演出的门票总收入为445570元”,不扣分.

20. 解:(1) $\bar{x} = \frac{3+3+4+5+5+6+6+8}{8} = 5$, $\bar{y} = \frac{10+12+13+18+19+21+24+27}{8} = 18$ 1分
 $\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 16+12+5+0+0+3+6+27 = 69$, 2分
 $\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = 4+4+1+0+0+1+1+9 = 20$, $\sum_{i=1}^8 (y_i - \bar{y})^2 = 64+36+25+0+1+9+36+81 = 252$, 3分
代入公式可得相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^8 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{69}{\sqrt{20} \times \sqrt{252}} = \frac{23}{4\sqrt{35}} \approx 0.97$ 4分
由于 $|r| > 0.75$ 且 r 非常接近1,所以 y 与 x 具有很强的线性相关关系. 5分
经计算可得 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{69}{20} = 3.45$, 6分
 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 18 - 3.45 \times 5 = 0.75$. 所以所求线性回归方程为 $\hat{y} = 3.45x + 0.75$ 7分
(2)(i)当 $x=10$ 时, $\hat{y}=35.25$,所以预计能带动的消费达35.25百万元. 9分
(ii)因为 $\frac{|30-35.25|}{35.25} > 10\%$,所以发放的该轮消费券助力消费复苏不是理想的. 11分
发放消费券只是影响消费的其中一个因素,还有其他重要因素,比如:A城市经济发展水平不高,居民的收入水平直接影响了居民的消费水平,A城市人口数量有限、商品价格水平、消费者偏好、消费者年龄构成等因素一定程度上影响了消费总量(只要写出一个原因即可). 12分

评分细则:

【1】第(1)问中, x, y 的平均数只求了一个,不给分.

【2】第(2)问的第(ii)问涉及的其他因素很多,比较主观,考生只要答出一个比较合理的原因即可.

21. (1)解: $f'(x) = 12x^3 - \frac{12}{x^4} = \frac{12(x^7 - 1)}{x^4}$ 1分

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 2分

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 3分

所以 $f(x)_{\min} = f(1) = 7$ 4分

(2)证明: (i) 由(1)可知 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 5分

$x_1^4 + (2-x_1)^4 - x_1^3 - (2-x_1)^3 = x_1^3(x_1-1) + (2-x_1)^3(1-x_1) = (x_1-1)[x_1^3 - (2-x_1)^3]$, 6分

因为 $0 < x_1 < 1$, 所以 $x_1 - 1 < 0$, $0 < x_1 < 2 - x_1$, 则 $(x_1 - 1)[x_1^3 - (2 - x_1)^3] > 0$, 所以 $x_1^3 + (2 - x_1)^3 < x_1^4 + (2 - x_1)^4$ 7分

(ii) 由 $0 < x_1 < 1 < x_2$ 得 $1 < 2 - x_1 < 2$, 要证 $x_1 + x_2 > 2$, 只需证 $x_2 > 2 - x_1$, 只需证 $f(x_2) > f(2 - x_1)$, 即证 $f(x_1) > f(2 - x_1)$ 8分

令函数 $g(x) = f(x) - f(2-x)$ ($0 < x < 1$),

则 $g'(x) = f'(x) + f'(2-x) = 12x^3 - \frac{12}{x^4} + 12(2-x)^3 - \frac{12}{(2-x)^4}$, 9分

所以 $g'(x) = 12[x^3 + (2-x)^3 - \frac{1}{x^4} - \frac{1}{(2-x)^4}] < 12[x^4 + (2-x)^4 - \frac{1}{x^4} - \frac{1}{(2-x)^4}] = 12[x^4 + (2-x)^4 - \frac{x^4 + (2-x)^4}{(2x-x^2)^4}] = 12[x^4 + (2-x)^4] \cdot \frac{(2x-x^2)^4 - 1}{(2x-x^2)^4}$, 10分

因为 $2x - x^2 = x(2-x) < \frac{(x+2-x)^2}{4} = 1$, 所以 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减. 11分

所以 $g(x) > g(1) = 0$, 则 $f(x) > f(2-x)$ ($0 < x < 1$), 故 $x_1 + x_2 > 2$ 12分

评分细则:

【1】第(1)问中, 考生得到“当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$ ”, 但没有写单调递减, 不扣分; 考生得到“当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$ ”, 但没有写单调递增, 同样不扣分.

【2】第(2)问的第(ii)问未写“由 $0 < x_1 < 1 < x_2$ 得 $1 < 2 - x_1 < 2$ ”, 直接得到“ $f(x_2) > f(2 - x_1)$ ”, 扣1分.

22. (1)解: 设 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 不妨设右焦点为 $(c, 0)$, 渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 1分

右焦点到渐近线的距离 $d = \frac{\frac{bc}{a}}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}} = b = \sqrt{2}$ 2分

因为 C 为等轴双曲线, 所以 $a = b = \sqrt{2}$ 3分

所以 C 的方程为 $x^2 - y^2 = 2$ 4分

(2)证明: 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$. 由 $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = |\vec{OP}| \cdot |\vec{OQ}| \cdot \cos 45^\circ$, 得 $x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} |\vec{OP}| \cdot |\vec{OQ}|$, 5分

且 $|\vec{OP}|^2 = x_1^2 + y_1^2 = 2x_1^2 - 2 = 2y_1^2 + 2$, $|\vec{OQ}|^2 = x_2^2 + y_2^2 = 2x_2^2 - 2 = 2y_2^2 + 2$, 6分

所以 $y_1^2 y_2^2 = \frac{1}{2} |\vec{OP}|^2 \cdot |\vec{OQ}|^2 + x_1^2 x_2^2 - \sqrt{2} x_1 x_2 \cdot |\vec{OP}| \cdot |\vec{OQ}|$, 7分

则 $\frac{|\vec{OP}|^2 - 2}{2} \cdot \frac{|\vec{OQ}|^2 - 2}{2} = \frac{1}{2} |\vec{OP}|^2 \cdot |\vec{OQ}|^2 + \frac{|\vec{OP}|^2 + 2}{2} \cdot \frac{|\vec{OQ}|^2 + 2}{2} - \sqrt{2} x_1 x_2 \cdot |\vec{OP}| \cdot |\vec{OQ}|$,

即 $|\vec{OP}|^2 \cdot |\vec{OQ}|^2 + 2|\vec{OP}|^2 + 2|\vec{OQ}|^2 = 2\sqrt{2} x_1 x_2 \cdot |\vec{OP}| \cdot |\vec{OQ}|$, 9分

平方后得 $(|OP|^2 \cdot |OQ|^2 + 2|OP|^2 + 2|OQ|^2)^2 = 8 \times \frac{|OP|^2 + 2}{2} \cdot \frac{|OQ|^2 + 2}{2} \cdot |OP|^2 \cdot |OQ|^2$, 10 分

等式两边同时除以 $|OP|^4 \cdot |OQ|^4$, 得 $(1 + \frac{2}{|OP|^2} + \frac{2}{|OQ|^2})^2 = 2(1 + \frac{2}{|OP|^2})(1 + \frac{2}{|OQ|^2})$, 11 分

即 $\frac{4}{|OP|^4} + \frac{4}{|OQ|^4} = 1$, 即 $\frac{1}{|OP|^4} + \frac{1}{|OQ|^4} = \frac{1}{4}$.

所以 $\frac{1}{|OP|^4} + \frac{1}{|OQ|^4}$ 是定值, 且该定值为 $\frac{1}{4}$ 12 分

评分细则:

【1】第(1)问中, C 的方程写为 “ $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ ”, 不扣分.

【2】第(2)问还可以这样解答:

由 $\angle POQ = \frac{\pi}{4}$, 得 P, Q 必在 C 的同一支上且位居 x 轴的两侧, 不妨设 P, Q 在 C 的右支上, 如图所示. 5 分

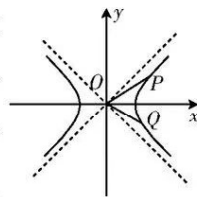
令 $k_{OP} = k (0 < k < 1)$, 则 $k_{OQ} = \frac{k-1}{k+1}$ 7 分

由 $\begin{cases} y=kx, \\ x^2-y^2=2, \end{cases}$ 得 $x^2 = \frac{2}{1-k^2}$, 8 分

则 $|OP|^2 = (1+k^2)x^2 = \frac{2(1+k^2)}{1-k^2}$, 9 分

以 $\frac{k-1}{k+1}$ 代 k 得 $|OQ|^2 = \frac{2[1+(\frac{k-1}{k+1})^2]}{1-(\frac{k-1}{k+1})^2} = \frac{1+k^2}{k}$, 10 分

故 $\frac{1}{|OP|^4} + \frac{1}{|OQ|^4} = \frac{(1-k^2)^2}{4(1+k^2)^2} + \frac{4k^2}{4(1+k^2)^2} = \frac{1}{4}$ (为定值). 12 分



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线