

腾·云联盟 2022—2023 学年度第一学期高三年级十二月联考

数学参考答案

一、单选题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	D	C	A	C	B	A	A	B

二、多选题：

题号	9	10	11	12
选项	BC	AC	BCD	ABD

三、填空题：

13. 答案：146

14. 答案：2

15. 答案： $\sin \pi x$ ($A \sin \pi x$ 等其他符合条件的函数也可)

16. 答案：15

四、解答题：

17. 解析：(1) 联立 $\begin{cases} 2a_n + b_n = 7 \times 2^n \\ 3a_n - 2b_n = 7n \end{cases}$ ，解得，

$$a_n = 2^{n+1} + n, \quad b_n = 3 \times 2^n - 2n. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) S_{10} = (2^2 + 2^3 + \dots + 2^{11}) + (1 + 2 + \dots + 10)$$

$$= \frac{4 \times (1 - 2^{10})}{1 - 2} + \frac{(1 + 10) \times 10}{2} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$= 4 \times (2^{10} - 1) + 55$$

$$= 4147 \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

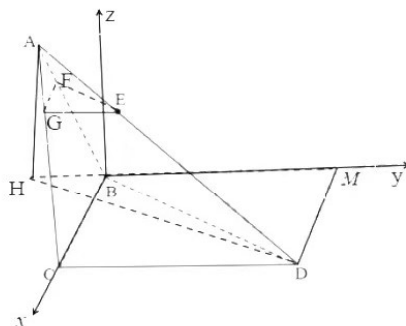
18. 解析：(1) 作法：如图，作 $EF \parallel BD$ 交 AB 于 F ，作 $EG \parallel CD$ 交 AC 于 G ，连接 FG ，
则 $\triangle EFG$ 即截面 α . $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

证明: $\because EF \parallel BD, EF \not\subset \text{平面} BCD, BD \subset \text{平面} BCD, \therefore EF \parallel \text{平面} BCD$

同理 $EG \parallel \text{平面} BCD$, 而 $EF \cap EG = E$

$\therefore \text{平面} EFG \parallel \text{平面} BCD$, 即截面 $\alpha \parallel \text{平面} BCD$ 6 分

(2)



方法一: (综合法)

如图, 在平面 BCD 中作 $BM \parallel CD, DM \parallel BC$, 则 $BC \perp BM, BC \perp BA$, 而 $BA \cap BM = B$,

$\therefore BC \perp \text{平面} ABM$, $\therefore \angle ABM$ 即二面角 A-BC-D 的一个平面角,

$\therefore \angle ABM = 120^\circ$ 8 分

易知, 平面 $ABM \perp \text{平面} BCDM$, 设点 A 在平面 BCDM 上的投影为 H, 则 H 在 MB 的延长线上, 连接 DH, 则 $\angle ABH = 60^\circ$,

$\therefore \angle ADH$ 即直线 AD 与平面 BCD 所成的角, 也等于 AD 与平面 α 所成的角9 分

$$\because AH = AB \sin 60^\circ = \sqrt{3}, BH = 1, DH = \sqrt{HM^2 + DM^2} = \sqrt{29}$$

$$\therefore \tan \angle ADH = \frac{AH}{DH} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{87}}{29}$$

$\therefore$ 直线 AD 与平面 α 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{87}}{29}$ 12 分

方法二: (向量法)

如图, 在平面 BCD 中作 $BM \parallel CD, DM \parallel BC$, 则 $BC \perp BM, BC \perp BA$, 而 $BA \cap BM = B$,

$\therefore BC \perp \text{平面} ABM$, $\therefore \angle ABM$ 即二面角 A-BC-D 的一个平面角,

$\therefore \angle ABM = 120^\circ$ 8 分

由第(1)问可知直线AD与平面BCD所成的角等于AD与平面 α 所成的角.....9分
可建立如图所示的空间直角坐标系,z轴在平面ABM上.

计算得点 $A(0,-1,\sqrt{3}), D(2,4,0)$, $\therefore \overrightarrow{AD} = (2,5,-\sqrt{3})$

取平面BCD的一个法向量为 $\vec{n} = (0,0,1)$

设AD与平面 α 所成的角为 θ , 则

$$\sin\theta = |\cos\langle \overrightarrow{AD}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AD}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{8} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \tan\theta = \frac{\sqrt{87}}{29}$$

$$\therefore \text{直线AD与平面}\alpha\text{所成角的正切值为}\frac{\sqrt{87}}{29} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解析: (1) 设5次投掷投中1号x次, 2号y次, 3号z次, 未投中t次, 则

$$\begin{cases} x+y+z+t=5 \\ 3x+4y+5z=17 \\ 0 \leq x, y, z, t \leq 5 \\ x, y, z, t \in \mathbb{Z} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x=4 \\ y=0 \\ z=1 \\ t=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=0 \\ t=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \\ t=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=1 \\ t=1 \end{cases}$$

$$\therefore \text{不同的方法数 } N = C_5^4 C_1^1 + C_5^3 C_2^2 + C_5^1 C_4^3 C_3^1 + C_5^3 C_2^1 C_1^1 = 95. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2)(i) 设选手A选择1号、2号、3号箱作为目标箱, 5次投中的次数依次为 X_1, X_2, X_3 ,

最终的得分分别为 Y_1, Y_2, Y_3 , 则

$$X_1 \sim B(5, 0.7), X_2 \sim B(5, 0.5), X_3 \sim B(5, 0.3)$$

$$\therefore EY_1 = E(3X_1) = 3E(X_1) = 3 \times 5 \times 0.7 = 10.5$$

$$EY_2 = E(4X_2) = 4E(X_2) = 4 \times 5 \times 0.5 = 10$$

$$EY_3 = E(5X_3) = 5E(X_3) = 5 \times 5 \times 0.3 = 7.5$$

$$\therefore EY_1 > EY_2 > EY_3$$

$\therefore$ 建议选手 A 选择 1 号箱.10 分

(ii) 下述方案仅供参考, 只要考生设计的方案可行, 概率计算正确, 均可给分。

方案一: A 连续 5 次选择投掷 3 号箱11 分

$$A \text{ 最终获胜的概率为 } P = \left(\frac{3}{10}\right)^5 = \frac{243}{100000} = 0.00243 \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

方案二: A 前 4 次均选择投掷 3 号箱, 第 5 次投 2 号箱11 分

$$A \text{ 最终获胜的概率为 } P = \left(\frac{3}{10}\right)^4 \times \frac{1}{2} = \frac{81}{20000} = 0.00405 \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20.解析: (1) $\because \cos^2 B + \cos^2 C - \cos^2 A = 1 - \sin B \sin C$

$$\therefore (1 - \sin^2 B) + (1 - \sin^2 C) - (1 - \sin^2 A) = 1 - \sin B \sin C$$

$$\therefore \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$$

由正弦定理得, $b^2 + c^2 - a^2 = bc$

$$\text{由余弦定理得, } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$$

$$\because A \in (0, \pi) \quad \therefore A = \frac{\pi}{3} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, 由 } \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2 \text{ 得, } AB = 2 \sin C \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

由图知, 要使 BH 最大, 角 B 为锐角

$$\therefore BH = AB \cdot \cos B = 2 \sin C \cdot \cos B$$

$$= 2 \sin C \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{3} - C \right) = 2 \sin C \left(-\frac{1}{2} \cos C + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 2C + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \cos 2C) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\left(2C + \frac{\pi}{3}\right) \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\because 0 < C < \frac{2\pi}{3}, \therefore \frac{\pi}{3} < 2C + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3}$$

$$\therefore \text{当 } 2C + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}, \text{ 即 } C = \frac{7\pi}{12} \text{ 时, } |BH|_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

另解：考虑圆的内接 $\triangle ABC$ ，动态分析，寻找特殊位置知：当 AH 与圆相切时， BH 最大，结合正弦定理也可求得 BH 的最大值。（求解正确也可酌情给分）

21、解析：（1）由题意知
$$\begin{cases} 2c = 2 \\ 4a = 8 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

（2）（i）设点 $T(8, t), A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ ，则由题意可得椭圆 C 在 $A(x_A, y_A)$,

$$B(x_B, y_B) \text{ 处的切线方程分别为: } \frac{x_A x}{4} + \frac{y_A y}{3} = 1, \quad \frac{x_B x}{4} + \frac{y_B y}{3} = 1$$

$\because$ 点 $T(8, t)$ 在两条切线上

$$\therefore \frac{8x_A}{4} + \frac{ty_A}{3} = 1, \quad \frac{8x_B}{4} + \frac{ty_B}{3} = 1 \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

由于过 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ 两点的直线仅有一条

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的方程为 } \frac{8x}{4} + \frac{ty}{3} = 1, \text{ 即 } 2x + \frac{ty}{3} = 1$$

$$\therefore \text{当 } t \text{ 变化时, 直线 } AB \text{ 过定点 } Q\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

（ii）由图知，当直线 AB 的斜率存在时不为0，设直线 AB 的方程为 $x = \frac{1}{2} + ny$ ，代入

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ 整理得, } 4(3n^2 + 4)y^2 + 12ny - 45 = 0, \Delta > 0 \text{ 恒成立, 不妨令 } y_A > 0, y_B < 0,$$

$$\therefore \begin{cases} y_A + y_B = \frac{-3n}{3n^2 + 4} & \text{①} \\ y_A y_B = \frac{-45}{4(3n^2 + 4)} & \text{②} \end{cases} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore \mu = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}|QA||QF_1|\sin \angle AQF_1}{\frac{1}{2}|QB||QF_2|\sin \angle BQF_2} = -3 \frac{y_A}{y_B}$$

$$\frac{\text{①}^2}{\text{②}} \text{ 得 } \frac{(y_A + y_B)^2}{y_A y_B} = \frac{y_A}{y_B} + \frac{y_B}{y_A} + 2 = \frac{-4n^2}{5(3n^2 + 4)}$$

当 $n = 0$ 时, $y_A = -y_B$, 此时 $\mu = 3$;

$$\text{当 } n \neq 0 \text{ 时, } \frac{y_A}{y_B} + \frac{y_B}{y_A} + 2 = \frac{-4n^2}{5(3n^2 + 4)} = \frac{-4}{5\left(3 + \frac{4}{n^2}\right)} \in \left(-\frac{4}{15}, 0\right),$$

$$\text{令 } \frac{y_A}{y_B} = \lambda (\lambda < 0 \text{ 且 } \lambda \neq -1), \text{ 则 } -\frac{4}{15} < \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 < 0,$$

$$\therefore \lambda^2 + \frac{34}{15}\lambda + 1 < 0 (\lambda < 0 \text{ 且 } \lambda \neq -1), \text{ 解得 } -\frac{5}{3} < \lambda < -\frac{3}{5} \text{ 且 } \lambda \neq -1$$

$$\text{综上知, } \lambda \in \left(-\frac{5}{3}, -\frac{3}{5}\right), \text{ 进而 } \mu \in \left(\frac{9}{5}, 5\right) \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 解析: (1) 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x) = x - 2\sin x - \ln x$,

$$\therefore f'(x) = 1 - 2\cos x - \frac{1}{x}, f'(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 上单调递增}$$

$$\text{又 } \because f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{\pi} < 0, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$$

$$\therefore \text{存在唯一的 } t \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 使得 } f'(t) = 0$$

且当 $x \in (0, t)$ 时 $f'(t) < 0$, 当 $x \in (t, \frac{\pi}{2})$ 时 $f'(t) > 0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有唯一的极小值点 t 4 分

$$(2) \because f(x) = x - 2\sin x - \ln|x| = \begin{cases} x - 2\sin x - \ln x & (x > 0) \\ x - 2\sin x - \ln(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x - 2\sin x - \ln x$, 分 3 种情况讨论:

$$\textcircled{1} \text{ 当 } x \in (0, \frac{\pi}{2}] \text{ 时, } f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} - 2\sin\frac{1}{e^2} + 2 > 0, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} - \ln\frac{\pi}{3} < 0,$$

$$f(x)_{\min} = f(t) < f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2 - \ln\frac{\pi}{2} < 0$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有唯一的零点 x_1 ;5 分

$$\textcircled{2} \text{ 当 } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \text{ 时, } f'(x) = 1 - 2\cos x - \frac{1}{x} > 0 \text{ 恒成立, } f(x) \text{ 单调递增}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2 - \ln\frac{\pi}{2} < 0, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - \ln\frac{3\pi}{2} > 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上有唯一的零点 x_2 ;6 分

$$\textcircled{3} \text{ 当 } x \in \left(\frac{3\pi}{2}, +\infty\right) \text{ 时, } f(x) = x - 2\sin x - \ln x > x - 2 - \ln x$$

$$\text{令 } g(x) = x - 2 - \ln x, \quad x \in \left(\frac{3\pi}{2}, +\infty\right), \text{ 则 } g'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0, \quad g(x) \text{ 递增}$$

$$\therefore g(x) > g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - 2 - \ln \frac{3\pi}{2} > \frac{9}{2} - 2 - \ln e^2 = \frac{1}{2} > 0$$

$\therefore f(x)$ 在 $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, +\infty\right)$ 上无零点. 8 分

当 $x < 0$ 时, $f(x) = x - 2\sin x - \ln(-x)$, 分 2 种情况讨论:

(I) 当 $x \in (-\infty, -2]$ 时, $x - 2\sin x < 0, -\ln(-x) < -\ln 2 < 0$, $\therefore f(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $x \in (-\infty, -2]$ 上无零点 9 分

(II) 当 $x \in (-2, 0)$ 时, $f(x) = x - 2\sin x - \ln(-x)$, $f'(x) = 1 - 2\cos x - \frac{1}{x}$,

令 $h(x) = 2\cos x + \frac{1}{x}, x \in (-2, 0)$, 则 $h'(x) = -2\sin x - \frac{1}{x^2}, h''(x) = -2\cos x + \frac{2}{x^3}$,

令 $\varphi(x) = h''(x) = -2\cos x + \frac{2}{x^3}$, 则 $\varphi'(x) = 2\sin x - \frac{6}{x^4} < 0$ 在 $x \in (-2, 0)$ 上恒成立

$\therefore \varphi(x) = h''(x) = -2\cos x + \frac{2}{x^3}$ 在 $x \in (-2, 0)$ 上单调递减

而 $\varphi(-2) = h''(-2) = -2\cos 2 - \frac{1}{4} \approx 0.832 - 0.25 > 0, \varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right) = h''\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - 2 \times \left(\frac{6}{\pi}\right)^3 < 0$,

$\therefore$ 存在 $t_1 \in \left(-2, -\frac{\pi}{6}\right)$ 使得 $h''(t_1) = 0$, 且

当 $x \in (-2, t_1)$ 时, $h''(x) > 0$, $h'(x)$ 递增; 当 $x \in (t_1, 0)$ 时, $h''(x) < 0$, $h'(x)$ 递减.

$\therefore h(-2) = 2\sin 2 - \frac{1}{4} > 2\sin \frac{5\pi}{6} - \frac{1}{4} = 0, h'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{9}{\pi^2} > 0, h'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{36}{\pi^2} < 0$

$\therefore$ 存在 $t_2 \in \left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$ 使得 $h'(t_2) = 0$, 且

当 $x \in (-2, t_2)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 递增; 当 $x \in (t_2, 0)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 递减

$$\therefore \text{当 } x \in (-2, 0) \text{ 时, } h(x)_{\max} = h(t_2) = 2 \cos t_2 + \frac{1}{t_2}, \quad t_2 \in \left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{注意到 } 1 < 2 \cos t_2 < \sqrt{3}, -\frac{6}{\pi} < \frac{1}{t_2} < -\frac{6}{\pi}, \therefore h(x)_{\max} = 2 \cos t_2 + \frac{1}{t_2} < \sqrt{3} - \frac{6}{\pi} < 1$$

$$\text{所以 } f'(x) = 1 - 2 \cos x - \frac{1}{x} > 0 \text{ 在 } x \in (-2, 0) \text{ 上恒成立}$$

$$\therefore \text{当 } x \in (-2, 0) \text{ 时, } f(x) = x - 2 \sin x - \ln(-x) \text{ 单调递增}$$

$$\text{又 } f(-2) = -2 + 2 \sin 2 - \ln 2 < 0, \quad f(-e^{-3}) = -e^{-3} + 2 \sin(-e^{-3}) + 3 > 0$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } x \in (-2, 0) \text{ 上存在唯一的零点 } x_3. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

综上知, $f(x)$ 在定义域上共有 3 个零点 x_1 、 x_2 、 x_3 ,

$$\text{且 } x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad x_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad x_3 \in (-2, 0). \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线