

# 南京市 2022 届高三年级学情调研

## 数 学

2021.09

注意事项:

1. 本试卷共6页,包括单项选择题(第1题~第8题)、多项选择题(第9题~第12题)、填空题(第13题~第16题)、解答题(第17题~第22题)四部分。本试卷满分为150分,考试时间为120分钟。

2. 答卷前,考生务必将自己的学校、姓名、考生号填涂在答题卡上指定的位置。

3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上指定位置,在其他位置作答一律无效。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | x^2 - 9 \leq 0\}$ ,  $B = \{x | 2x - 4 > 0\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $(-\infty, -3]$       B.  $[-3, +\infty)$       C.  $[-3, 2)$       D.  $(2, 3]$

2. 已知  $\frac{a+i}{2-i}$  是纯虚数, 其中  $i$  为虚数单位, 则实数  $a =$

- A.  $-2$       B.  $-\frac{1}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $2$

3. “ $m=1$ ”是“直线  $4x+3y+m=0$  与圆  $x^2+y^2-2x=0$  相切”的

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件      D. 既不充分也不必要条件

4. 已知  $a, b$  为单位向量, 且  $(4a-b) \perp (a+3b)$ , 则  $a, b$  夹角的余弦值为

- A.  $-\frac{7}{11}$       B.  $-\frac{1}{11}$       C.  $\frac{1}{11}$       D.  $\frac{7}{11}$

5. 将4名志愿者全部安排到某社区参加3项工作, 每人参加1项, 每项工作至少有1人参加, 则不同的安排方式共有

- A. 24种      B. 36种      C. 60种      D. 72种

6. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_2$  且垂直于  $x$  轴的直线与  $C$  交于  $P, Q$  两点,  $F_1Q$  与  $y$  轴的交点为  $R$ ,  $F_1Q \perp PR$ , 则  $C$  的离心率为

- A.  $\sqrt{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C.  $2$       D.  $\sqrt{5}$

高三数学试卷第1页(共6页)



11. 设正实数  $x, y$  满足  $2x + y = 1$ , 则

A.  $xy$  的最大值是  $\frac{1}{4}$

B.  $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$  的最小值是 9

C.  $4x^2 + y^2$  的最小值为  $\frac{1}{2}$

D.  $\sqrt{2x} + \sqrt{y}$  的最大值为 2

12. 已知  $f(x)$  是周期为 4 的奇函数, 且当  $0 \leq x \leq 2$  时,  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

设  $g(x) = f(x) + f(x+1)$ , 则

A. 函数  $y = g(x)$  为周期函数

B. 函数  $y = g(x)$  的最大值为 2

C. 函数  $y = g(x)$  在区间  $(7, 8)$  上单调递增

D. 函数  $y = g(x)$  的图象既有对称轴又有对称中心

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 将函数  $y = \cos x$  的图象向右平移  $\varphi (\varphi > 0)$  个单位长度, 所得图象与  $y = \sin x$  的图象重合, 则  $\varphi$  的一个可能的值为  $\frac{\pi}{2}$ . (写出一个正确答案即可)

14. 已知  $(1 + \frac{1}{2}x)^n (n \in \mathbb{N}^*)$  的展开式中  $x^2$  的系数是 7, 则  $n = 7$ ; 若  $x^r$  与  $x^{r+1} (r \in \mathbb{N})$  的系数相等, 则  $r = 5$ .

15. 如图 1 所示, 抛物面天线是指由抛物面(抛物线绕其对称轴旋转形成的曲面)反射器和位于其焦点上的照射器(馈源, 通常采用喇叭天线)组成的单反射面型天线, 广泛应用于微波和卫星通讯等, 具有结构简单、方向性强、工作频带宽等特点. 图 2 是图 1 的轴截面,  $A, B$  两点关于抛物线的对称轴对称,  $F$  是抛物线的焦点,  $\angle AFB$  是馈源的方向角, 记为  $\theta$ . 焦点  $F$  到顶点的距离  $f$  与口径  $d$  的比值  $\frac{f}{d}$  称为抛物面天线的焦径比, 它直接影响天线的效率与信噪比等. 如果某抛物面天线的焦径比等于 0.5, 那么馈源方向角  $\theta$  的正切值为  $\frac{1}{2}$ .

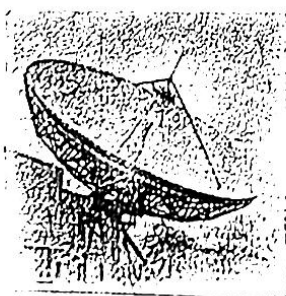


图 1

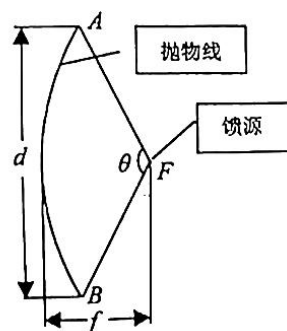


图 2

16. 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $\triangle ABC$  和  $\triangle PBC$  都是边长为  $2\sqrt{3}$  的正三角形,  $PA=3\sqrt{2}$ . 若  $M$  为三棱锥  $P-ABC$  外接球上的动点, 则点  $M$  到平面  $ABC$  距离的最大值为         ▲        .

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知正项等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $S_3=7a_1$ , 且  $a_1, a_2+2, a_3$  成等差数列.

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $b_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数,} \\ n, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$  求数列  $\{b_n\}$  的前  $2n$  项和  $T_{2n}$ .

18. (本小题满分 12 分)

请在①  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$ ; ②  $\sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ ; ③  $a+b=5$  这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并作答.

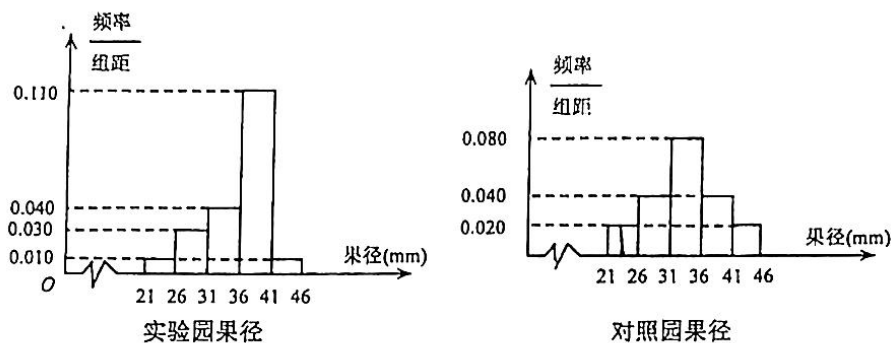
在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 已知  $\sin(A-C) + \sin B = \sin A$ ,  $c=2$ ,         ▲        ,

若该三角形存在, 求该三角形的面积; 若该三角形不存在, 请说明理由.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. (本小题满分 12 分)

科研小组为提高某种水果的果径,设计了一套实验方案,并在两片果园中进行对比实验.其中实验园采用实验方案,对照园未采用.实验周期结束后,分别在两片果园中各随机选取 100 个果实,按果径分成 5 组进行统计:[21,26),[26,31),[31,36),[36,41),[41,46] (单位:mm).统计后分别制成如下的频率分布直方图,并规定果径达到 36mm 及以上的为“大果”.



(1)请根据题中信息完成下面的列联表,并判断是否有 99.9%的把握认为“大果”与“采用实验方案”有关;

	采用实验方案	未采用实验方案	合计
大果	▲	▲	▲
非大果	▲	▲	▲
合计	100	100	200

(2)根据长期种植经验,可以认为对照园中的果径  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ,其中  $\mu$  近似为样本平均数  $\bar{x}$ ,  $\sigma \approx 5.5$ .请估计对照园中果径落在区间(39,50)内的概率.(同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值作代表)

附:①  $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

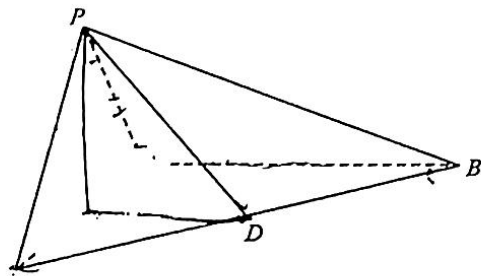
$P(\chi^2 \geq x_0)$	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
$x_0$	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

②若  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ,则  $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.683$ ,  $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.954$ ,  $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.997$ .

20. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱锥  $P-ABC$  中,  $AC=2$ ,  $BC=4$ ,  $\triangle PAC$  为正三角形,  $D$  为  $AB$  的中点,  $AC \perp PD$ ,  $\angle PCB=90^\circ$ .

- (1) 求证:  $BC \perp$  平面  $PAC$ ;  
(2) 求  $PD$  与平面  $PBC$  所成角的正弦值.



(第 20 题)

21. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右顶点分别为  $A, B$ .  $F$  是椭圆  $C$  的右焦点, 且  $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$ ,  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FB} = 3$ .

- (1) 求椭圆  $C$  的方程;  
(2) 不过点  $A$  的直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $M, N$  两点, 记直线  $l, AM, AN$  的斜率分别为  $k, k_1, k_2$ .  
若  $k(k_1 + k_2) = 1$ , 证明直线  $l$  过定点, 并求出定点的坐标.

22. (本小题满分 12 分)

设函数  $f(x) = (x^2 - a)e^x, a \in \mathbb{R}, e$  是自然对数的底数.

- (1) 若  $a = 3$ , 求函数  $f(x)$  的极值;  
(2) 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) + x + a \geq 0$ , 求  $a$  的取值范围.