

# 高三理科数学

## 考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本试卷主要命题范围:集合与常用逻辑用语,函数,导数及其应用,三角函数与解三角形,平面向量,复数,数列,不等式,立体几何,直线与圆,圆锥曲线。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \mid y = \sqrt{3 + 2x - x^2}\}$ ,  $B = \{y \mid y = e^x + a\}$  ( $a \in \mathbf{R}$ ), 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则  $a$  的取值范围为  
A.  $(-\infty, -1]$     B.  $(-\infty, -1)$   
C.  $(3, +\infty)$     D.  $[3, +\infty)$
2. 已知复数  $z$  满足  $(8 + 6i)z = 5 + 12i$ , 则  $|z| =$   
A.  $\frac{13\sqrt{7}}{20}$     B.  $\frac{13}{10}$     C.  $\frac{17}{14}$     D.  $\frac{15}{13}$
3. 已知直线  $l_1: x - 2y - 1 = 0$ ,  $l_2: 2x + my + 2\sqrt{5} - 2 = 0$ , 若  $l_1 \parallel l_2$ , 则  $l_1$  与  $l_2$  之间的距离为  
A. 1    B. 2    C.  $\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}$     D.  $\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}$
4. 我国古代历法从东汉的《四分历》开始,就有各节气初日晷影长度和太阳去极度的观测记录,漏刻、晷影成为古代历法的重要计算项目. 唐代僧一行在编制《大衍历》时发明了求任何地方每日晷影长和去极度的计算方法——“九服晷影法”,建立了晷影长  $l$  与太阳天顶距  $\theta$  之间的对应数表(世界上最早的正切函数表). 根据三角学知识:晷影长  $l$  等于表高  $h$  与天顶距  $\theta$  正切值的乘积,即  $l = h \tan \theta$ . 若对同一表高进行两次测量,测得晷影长分别是表高的 2 倍和 3 倍,记对应的天顶距分别为  $\theta_1$  和  $\theta_2$ , 则  $\tan(\theta_1 - \theta_2) =$   
A. -1    B.  $-\frac{1}{7}$     C.  $\frac{1}{3}$     D. 1
5. 已知  $F_1, F_2$  是平面内两个不同的定点,  $P$  为平面内的动点, 则“ $||PF_1| - |PF_2||$  的值为定值  $m$ , 且  $m < |F_1F_2|$ ”是“点  $P$  的轨迹是双曲线”的  
A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件  
C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件
6. 已知  $f(x) = \sin 2x + \tan x + 1$ , 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$  处的切线方程为  
A.  $2x + y + 6 - \pi = 0$     B.  $2x - y + 3 - \pi = 0$   
C.  $4x - 2y + 6 - \pi = 0$     D.  $4x - 2y + 6 + \pi = 0$

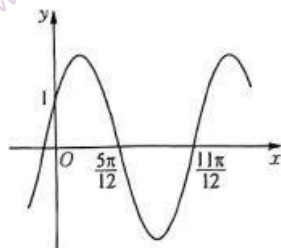
【高三 12 月质量检测·理科数学 第 1 页(共 4 页)】

7. 已知双曲线  $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ,  $F$  为  $C$  的下焦点,  $O$  为坐标原点,  $l_1$  是  $C$  的渐近线, 过  $F$  作斜率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  的直线  $l$  交  $l_1$  于点  $A$ , 交  $x$  轴的正半轴于点  $B$ , 若  $|OA| = |OB|$ , 则  $C$  的离心率为

- A. 2    B.  $\sqrt{3}$     C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$     D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

8. 函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$  的部分图象如图所示, 将  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度得到函数  $g(x)$  的图象, 则  $g(x) =$

- A.  $2 \cos 2x$   
B.  $\sqrt{3} \sin(2x - \frac{\pi}{6})$   
C.  $\sqrt{3} \sin(2x + \frac{\pi}{6})$   
D.  $2 \sin(2x + \frac{\pi}{6})$



9. 已知  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点,  $C$  过  $A(-2, 0)$  和  $B(0, 1)$  两点, 点  $P$  在线段  $AB$  上, 则  $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$  的取值范围为

- A.  $[-\frac{11}{5}, +\infty)$                           B.  $[1, \frac{37}{5}]$     C.  $[-2, 1]$     D.  $[-\frac{11}{5}, 1]$

10. 已知定义在  $(0, +\infty)$  上的函数  $f(x)$  满足: ①  $\forall x > 0, f(x) < 0$ ; ② 对任意正数  $x, y$ , 当  $x < y$  时,  $yf(x) > xf(y)$  恒成立. 若  $a = f(\sin 0.1) \sin 0.1, b = \frac{f(0.1)}{10}, c = f(\tan 0.1) \tan 0.1$ , 则

- A.  $a > b > c$     B.  $c > a > b$     C.  $b > c > a$     D.  $b > a > c$

11. 在四面体  $ABCD$  中,  $AB \perp AC, AB \perp BD$ , 异面直线  $AC$  与  $BD$  所成的角为  $30^\circ$ , 且二面角  $C-AB-D$  为锐二面角,  $AB=4, AC=5, BD=3$ , 则四面体  $ABCD$  的体积为

- A.  $2\sqrt{34-15\sqrt{3}}$     B. 3  
C. 5    D. 10

12. 将曲线  $C_1: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 (x \leq 0)$  和曲线  $C_2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 (x > 0)$  合成曲线  $E$ . 斜率为  $k$  的直线  $l$  与  $E$  交于

- $A, B$  两点,  $P$  为线段  $AB$  的中点, 则下列判断错误的是
- A. 曲线  $E$  所围成图形的面积小于 36  
B. 曲线  $E$  与其对称轴仅有两个交点  
C. 存在  $k$ , 使得点  $P$  的轨迹总在某个椭圆上  
D. 存在  $k$ , 使得点  $P$  的轨迹总在某条直线上

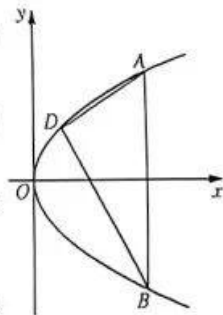
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量  $a, b$  满足  $|a| = \sqrt{3}, |b| = 1, |a+b| = 2$ , 则  $a+b$  与  $a-b$  的夹角为 \_\_\_\_\_.

14. 直线  $l$  过点  $(2, 1)$  且与圆  $C: (x+1)^2 + y^2 = 9$  相切, 则直线  $l$  的方程为 \_\_\_\_\_.

15. 如图, 直线  $x=t$  与抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  交于  $A, B$  两点,  $D$  为  $C$  上异于  $A, B$  的一点, 若  $AD \perp BD$ , 则点  $D$  到直线  $x=t$  的距离与  $p$  的比值为 \_\_\_\_\_.

16. 若  $x_1, x_2$  是函数  $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - e^x + 1 (a \in \mathbf{R})$  的两个极值点, 且  $\frac{x_2}{x_1} \geq 2$ , 则实数  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.



三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算:

17. (本小题满分 10 分)

在  $\triangle ABC$  中,角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $a \sin A - c \sin C = (b - c) \sin B$ .

(1) 求  $A$  的大小;

(2) 若  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 求  $\frac{b}{c}$  的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知直线  $l_1: x - ay + 2 = 0, l_2: ax + y - 2a = 0 (a \in \mathbf{R})$ , 若  $l_1$  与  $l_2$  的交点  $P$  的轨迹为曲线  $C$ .

(1) 求曲线  $C$  的方程;

(2) 若圆  $E: x^2 + y^2 - 2mx - 2ny = 0$  的圆心在直线  $y = \sqrt{3}x$  上, 且与曲线  $C$  相交所得公共弦  $MN$  的长为  $2\sqrt{3}$ , 求  $m, n$  的值.

19. (本小题满分 12 分)

在正项数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1, \forall n \geq 2, a_1 + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2n-3} = \frac{a_n - 1}{2}$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

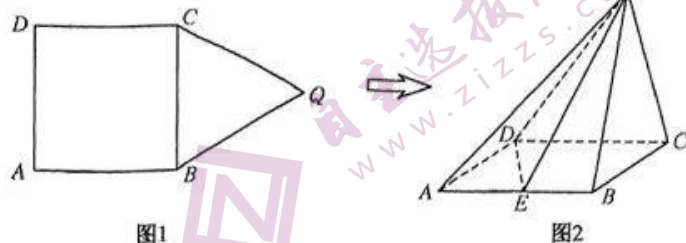
(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = a_1, b_2 = a_2 - 1$ , 且  $\ln b_n + \ln b_{n+2} = 2 \ln b_{n+1}$ , 设数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 证明:  $T_n \cdot T_{n+2} < T_{n+1}^2$ .



(本小题满分 12 分)

在边长为 2 的正方形  $ABCD$  外作等边  $\triangle BCQ$  (如图 1), 将  $\triangle BCQ$  沿  $BC$  折起到  $\triangle PBC$  处, 使得  $PD = 2\sqrt{2}$ ,  $E$  为  $AB$  的中点 (如图 2).

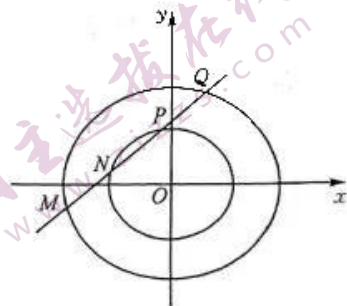
- (1) 求证: 平面  $PDE \perp$  平面  $PCD$ ;  
(2) 求二面角  $E-PD-A$  的正弦值.



(本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点为  $F_1(-1, 0)$ , 其左顶点为  $A$ , 上顶点为  $B$ , 且  $F_1$  到直线  $AB$  的距离为  $\frac{\sqrt{7}}{7} |OB|$  ( $O$  为坐标原点).

- (1) 求  $C$  的方程;  
(2) 若椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda (\lambda > 0 \text{ 且 } \lambda \neq 1)$ , 则称椭圆  $E$  为椭圆  $C$  的  $\lambda$  倍相似椭圆. 已知椭圆  $E$  是椭圆  $C$  的 3 倍相似椭圆, 直线  $l: y = kx + m$  与椭圆  $C, E$  交于四点 (依次为  $M, N, P, Q$ , 如图), 且  $\vec{MQ} + \vec{PQ} = 2\vec{NQ}$ , 证明: 点  $T(k, m)$  在定曲线上.



(本小题满分 12 分)

已知  $f(x) = x^2 + x + a \ln x (a \in \mathbf{R})$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

若  $a = 1$ , 函数  $g(x) = x + 1 - f(x)$ ,  $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2, |\lambda g(x_2) - x_2 g(x_1)| > \lambda |x_1 - x_2|$  恒成立, 求实数  $\lambda$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线