参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	A	C	C	C	B	A	C	B	D	C

二、填空题

13、3　　14、$(-1,\frac{1}{2})$　　15、$2\sqrt{3}-2$　　16、$\frac{1}{e}$

三、解答题

17、【答案】（1）$c=4$；（2）$(-1,1)$.

【解析】（1）由 $a\sin 2B=b\sin A$，得 $\cos B=\frac{1}{2}$，

在 $\triangle ABC$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$，

由余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$，得 $7=c^2+9-2c\times 3\cos\frac{\pi}{3}$，

即 $c^2-3c-2=0$，解得 $c=1$或$c=2$.

当 $c=1$ 时，$b^2+c^2-a^2=-2<0$，$\cos A<0$，即 A 为钝角（舍），

故 $c=2$ 符合.

（2）由（1）得 $B=\frac{\pi}{3}$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}-A$，

$$\therefore \frac{a\cos C-c\cos A}{b}=\frac{\sin A\cos C-\cos A\sin C}{\sin B}=\frac{\sin(A-C)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(2A-\frac{2\pi}{3}),$$

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形，$\therefore \frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$，$\therefore -\frac{\pi}{3}<2A-\frac{2\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$，

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin(2A-\frac{2\pi}{3})<\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore -1<\frac{a\cos C-c\cos A}{b}<1$，

故 $\dfrac{a\cos C-c\cos A}{b}$ 的取值范围是 $(-1,1)$.

18、（1）$\because DE\perp AB$，$\therefore DE\perp PE$， $DE\perp EB$，

又 $\because PE\cap BE=E$，$\therefore DE\perp$ 平面 PEB，

$\because DE\subset$ 平面 PDE，$\therefore$ 平面 $PBE\perp$ 平面 PED.

（2）$\because PB=4\sqrt{5}$，$PE=4$，$AB=12$，故 $EB=8$，

$\therefore EB^2+PE^2=PB^2$，得 $PE\perp BE$，

又由（1）得 $DE\perp PE$，$DE\cap BE=E$，$\therefore PE\perp$ 平面 $BEDC$，

连接 EC，过 B 做 $BH\perp CE$ 于 H，$\therefore BH\perp$ 平面PEC，连接 HP,

$\therefore \angle BPH$ 为 PB 与平面 PEC 成角

$\because EB=8$，$BC=12$，$\angle EBC=60^\circ$

由余弦定理得 $EC^2=BE^2+BC^2-2BE\times BC\times\cos\angle EBC=112$，

$\therefore EC=4\sqrt{7}$，$\therefore \frac{1}{2}\mathrm{EC}\cdot\mathrm{BH}=\frac{1}{2}\mathrm{EB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin 60^\circ$.

$\therefore \mathrm{BH}=\dfrac{12\sqrt{21}}{7}$

$\therefore \sin\angle BPH=\dfrac{3\sqrt{105}}{35}$

19、
0.06
两男生用a, b表示，4名女生用c, d, e, f表示A表示选3人男生至少1人的事件
总事件有abc, abd, abe, abf, acd, ace, acf, ade, adf, a ef, bcd, bce, bcf, bde, bdf, bef, cde, cdf, cef, def, 共20种，满足条件的有abc, abd, abe, abf, acd, ace, ac f, ade, adf, aef, bcd, bce, bcf, bde, bdf, b
bef, 共16种，
$P(A)=\dfrac{16}{20}=\dfrac{4}{5}$

20、【解析】（1）由条件知 $\begin{cases}\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{1}{4},\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=3,\end{cases}$

因此椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\overline{F_1A}=(x_1+1,y_1)$，$\overline{F_1B}=(x_2+1,y_2)$，

设直线 l 的方程为 $x=my+1$，

代入椭圆 C 的方程消去 x，得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

由韦达定理得 $y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$，

$\overline{F_1A}\cdot\overline{F_1B}=(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=(my_1+2)(my_2+2)+y_1y_2$

$=(1+m^2)y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4$

$=(1+m^2)\dfrac{-9}{3m^2+4}+2m\dfrac{-6m}{3m^2+4}+4=\dfrac{-9m^2+7}{3m^2+4}=-3+\dfrac{19}{3m^2+4}$，

$3m^2+4\ge4$，$\therefore 0<\dfrac{19}{3m^2+4}\le\dfrac{19}{4}$，$\therefore -3<-3+\dfrac{19}{3m^2+4}\le\dfrac{7}{4}$，

所以 $\overline{F_1A}\cdot\overline{F_1B}\in\left(-3,\dfrac{7}{4}\right]$.

21【解析】（1）当 $a=0$ 时，$g(x)=0$，无极值.

当 $a\ne0$ 时，$g'(x)=a(1-\dfrac{1}{x})=\dfrac{a(x-1)}{x}$，令 $g'(x)=0,$ 得 $x=1$.

当 $a>0$ 时，当 $x\in(0,1)$ 时,$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0,g(x)$ 单调递增；$\therefore g(x)$ 极小值为 $g(1)=a$，无极大值.

当$a<0$时，当$x\in(0,1)$时,$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；当$x\in[1,+\infty)$时，$g'(x)<0,g(x)$单调递减；$\therefore g(x)$极大值为$g(1)=a$，无极小值.

综上，$a=0$时，$g(x)$无极值；$a>0$时，$g(x)$极小值a，无极大值；

$a<0$时，$g(x)$极大值a，无极小值.

（2）令$h(x)=f(x)-g(x)=\frac{e^x}{x}-a(x-\ln x)(x\geq1)$，$h'(x)=\frac{(x-1)(\frac{e^x}{x}-a)}{x}(x\geq1)$，

$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$在$[1,+\infty)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$为,增函数，$f(x)_{\min}=f(1)=e$

当$a<e$时，$h'(x)\geq0,h(x)$为$[1,+\infty)$上增函数,$h(x)_{\min}=h(1)=e-a>0,\therefore h(x)$没有零点

当a=e时，$h'(x)\geq0,h(x)$为$[1,+\infty)$上增函数,$h(x)_{\min}=h(1)=e-a=0,\therefore 1$是$h(x)$唯一零点

当a>e时，$y=\frac{e^x}{x}-a$是增函数，$x=1$时，$y_{\min}=e-a<0$,故$\exists x_0\in[1,+\infty)$,使$\frac{e^{x_0}}{x_0}-a=0$

在$[1,x_0)$上$h'(x)<0,h(x)$为减函数，在$(x_0,+\infty)h'(x)>0,h(x)$为增函数，$h(1)=e-a<0$

在$[1,x_0)$上$h(x)<0,h(e^a)=\frac{e^{e^a}}{e^a}-a(e^a-a)=\frac{e^{e^a}-ae^{2a}}{e^a}+a^2$,下面证：$e^{e^a}>ae^{2a}$,即证$e^a>\ln a+2a$

$m(a)=e^a-\ln a-2a,m'(x)=e^a-\frac{1}{a}-2$为增函数，$a>e$时，$m'(x)>0,m(a)$为增函数，$m(e)=e^e-1-2$

$m(a)>0,h(e^a)>0,h(x)$在$(x_0,+\infty)$存在唯一零点

综上所述，$a\geq e$

22. $\frac{x^2}{9}+y^2=1,\rho^2=\frac{9}{\cos^2\theta+9\sin^2\theta}$

$(2)T(\rho_1,\theta),N\left(\rho_2,\theta+\frac{\pi}{2}\right),\rho_1^2\rho_2^2=\frac{81}{(\cos^2\theta+9\sin^2\theta)(\sin^2\theta+9\cos^2\theta)}=\frac{81}{9+16\sin^2 2\theta}$

$\frac{9}{5}\le\rho_1\rho_2\le3,\frac{9}{10}\le S=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\le\frac{3}{2}$

23.： $x\ge2\quad x-2+x+1=2x-1\ge4-x,x\ge\frac{5}{3},\therefore x\ge2$

$-1<x<2,2-x+x+1=3\ge4-x,x\ge1\quad\therefore1\le x<2$

$x\le-1,2-x-x-1=1-2x\ge4-x,x\le-3\quad\therefore x\le-3$

原不等式解集为$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

$f(x)\ge|x-2-(x+1)|=3$,当且仅当$-1\le x\le2$时，等号成立

$\therefore a\ge3,b\ge3$

$2(a+b)-ab-4=(2-b)(a-2),a-2>0,2-b<0,\therefore(2-b)(a-2)<0$

$\therefore2(a+b)<ab+4$

人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。