2023~2024 学年第一学期高三期初调研测试

数学

注意事项：

学生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求：

1．本卷共 4 页，包含单项选择题（第 1 题~第 8 题）、多项选择题（第 9 题~第 12 题）、填空题（第 13 题~第 16 题）、解答题（第 17 题~第 22 题）.本卷满分 150 分，答题时间为 120 分钟.答题结束后，请将答题卡交回.

2．答题前，请您务必将自己的姓名、调研序列号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在答题卡的规定位置.

3．请在答题卡上按照顺序在对应的答题区域内作答，在其他位置作答一律无效.作答必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔.请注意字体工整，笔迹清楚.

4．请保持答题卡卡面清洁，不要折叠、破损.一律不准使用胶带纸、修正液、可擦洗的圆珠笔.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=\left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|$（其中 i 为虚数单位），则复数 z 在复平面上对应的点在

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【答案】D

【解析】$z(1+\mathrm{i})=2$，$\therefore z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$，位于第四象限，选 D.

2．设集合 $A=\{x\mid x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid 2^x\geq 16\}$，则 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=$

A．$[0,4]$　　B．$[0,4)$　　C．$\{0,1,2,3\}$　　D．$\{0,1,2,3,4\}$

【答案】C

【解析】$B=\{x\mid x\geq 4\}$，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x<4\}$，$A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=\{0,1,2,3\}$，选 C.

3．已知函数 $f(x)=ax-\sin x(a\in\mathbf{R})$，则"$a=1$"是"$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$上单调递增"的

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】$a=1$时，$f(x)=x-\sin x$，$f'(x)=1-\cos x\geq 0$，$\therefore f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)\nearrow$，充分

$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$单调增，$\therefore f'(x)=a-\cos x\geq 0$，$\therefore a\geq 1$，不必要，充分不必要，选 B.

4．在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在线段 AC 上，且 $AE=2EC$，点 F 为线段 AD 的中点，记 $\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则 $\lambda+\mu=$

A．$-\frac{5}{6}$　　B．$-\frac{1}{6}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{5}{6}$

【答案】A

【解析】$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$，

$\lambda+\mu=-\frac{5}{6}$，选 A.

5．已知事件 A,B，且 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$.若 A 与 B 互斥，令 $a=P(AB)$；若 A 与 B 相互独立，令 $b=P(\overline{A}B)$，则 $b+a=$

A．0.3　　B．0.4　　C．0.5　　D．0.6

【答案】A

【解析】A,B 互斥，$\therefore a=P(AB)=0$，A 与 B 独立，$b=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$

$=0.6\times 0.5=0.3$，$b+a=0.3$，选 A.

6．若某圆柱体的底面半径与某球体的半径相等，圆柱体与球体的体积之比和它们的表面积之

比的比值相等，则该圆柱体的高与球体的半径的比值为

A．$\frac{5}{4}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．2

【答案】B

【解析】设圆柱底面半径为r，则球的半径为r，设圆柱的高为h，

$V_1=\pi r^2h$，$V_2=\frac{4}{3}\pi r^3$，$S_1=2\pi rh+2\pi r^2$，$S_2=4\pi r^2$，

$\therefore\frac{\pi r^2h}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{2\pi rh+2\pi r^2}{4\pi r^2}$，$\therefore\frac{h}{r}=2$，选B.

7．我国人脸识别技术处于世界领先地位.所谓人脸识别，就是利用计算机检测样本之间的相似度，余弦距离是检测相似度的常用方法.假设二维空间中有两个点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，O为坐标原点，余弦相似度为向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$夹角的余弦值，记作$\cos(A,B)$，余弦距离为$1-\cos(A,B)$.已知$P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$Q(\cos\beta,\sin\beta)$，$R(\cos\alpha,-\sin\alpha)$，若$P,Q$的余弦距离为$\frac{1}{3}$，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{1}{7}$，则$Q,R$的余弦距离为

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{7}$

【答案】A

【解析】$\cos(P,Q)=\frac{2}{3}$，$\therefore\cos(\alpha-\beta)=\frac{2}{3}$，$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}$，

又$\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{1}{7}$，$\therefore\cos\alpha\cos\beta=7\sin\alpha\sin\beta$，$\therefore\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{12}$，

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{7}{12}$，$1-\cos(Q,R)=1-\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{1}=1-\left(\frac{7}{12}-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{2}$，选A.

8．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，过$F$作直线分别与双曲线的两渐近线相交于$A$、$B$两点，且$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BF}=0$，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BF}$，则该双曲线的离心率为

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】$OB\perp BF$，$\therefore OB=a$，$BF=b$，$AB=2BF=2b$，$\tan\angle AOB=\dfrac{2b}{a}$

$\tan 2\angle FOB=\dfrac{2\cdot\frac{b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$，$\therefore\dfrac{2b}{a}+\dfrac{2\cdot\frac{b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=0$，$\therefore\left(\dfrac{b}{a}\right)^2=2$，$\therefore\dfrac{c^2}{a^2}=3$，$\therefore e=\sqrt{3}$，

选 B.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin\omega x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期为 π，则

A．$\omega=2$

B．直线 $x=-\dfrac{\pi}{6}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条对称轴

C．点 $\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个对称中心

D．$f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 内只有一个零点

【答案】ACD

【解析】$f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\therefore\omega=2$，A 对.

$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$x=-\dfrac{\pi}{6}$ 不是对称轴，$\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 是对称中心，B 错，C 对.

$0<x<\dfrac{5}{6}\pi$，$0<2x<\dfrac{5}{3}\pi$，$\dfrac{\pi}{3}<2x+\dfrac{\pi}{3}<2\pi$，$y=\sin x$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{3},2\pi\right)$ 只有一个零点，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{5}{6}\pi\right)$ 有且只有一个零点，D 对.

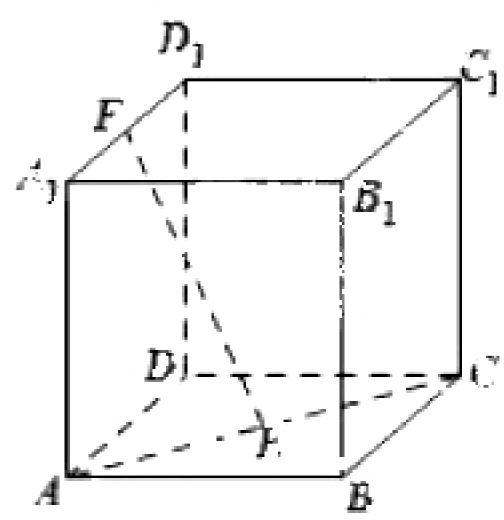
10．若一组不完全相同的数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为 $\overline{x}$，极差为 a，中位数为 b，方差为 s^2，在这组数据中加入一个数 $\overline{x}$ 后得到一组新数据 $\overline{x},x_1,x_2,\cdots,x_n$，其平均数为 $\overline{x'}$，极差为 a'，中位数为 b'，方差为 s'^2，则下列判断一定正确的是

A．$\overline{x'}=\overline{x}$　　B．$a'=a$　　C．$b'=b$　　D．$s'^2=s^2$

【答案】AB

【解析】互不相等的数据加入一个数 $\overline{x}$，则极差不变，平均数不变，中位数有可能改变，方差一定改变，选 AB.

11．如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别是线段 AC,A_1D_1 上的动点，$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{A_1F}=\mu\overrightarrow{A_1D}$ 且 $\lambda,\mu\in(0,1)$.记 EF 与 AA_1 所成角为 α，EF 与平面 $ABCD$ 所成角为 β，则



A．当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，四面体 $F-AEB$ 的体积为定值

B．当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，存在 λ，使得 $EF\parallel$ 平面 BDD_1B_1

C．对于任意 λ,μ，总有 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

D．当 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，在侧面 BCC_1B_1 内总存在一点 P，使得 $PE\perp PF$

【答案】ABC

【解析】方法一：

$\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时 $S_{\triangle EAB}$ 为定值 F 到平面 EAB 的距离为定值，$\therefore V_{F-EAB}$ 为定值，A 对.

$\mu=\dfrac{1}{2}$时，F为A_1D_1中点，取AD中点M，则$FM \parallel DD_1$.

$\lambda=\dfrac{1}{4}$时，$ME \parallel BD$，则平面$MEF \parallel$平面BDD_1B_1，$\therefore EF \parallel$平面BDD_1B_1，

$AA_1 \perp$面$ABCD$，则$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，C对，选ABC.

方法二：对于A，$\lambda=\dfrac{1}{2}$时，F到平面AEB的距离为定值，E为AC中点，

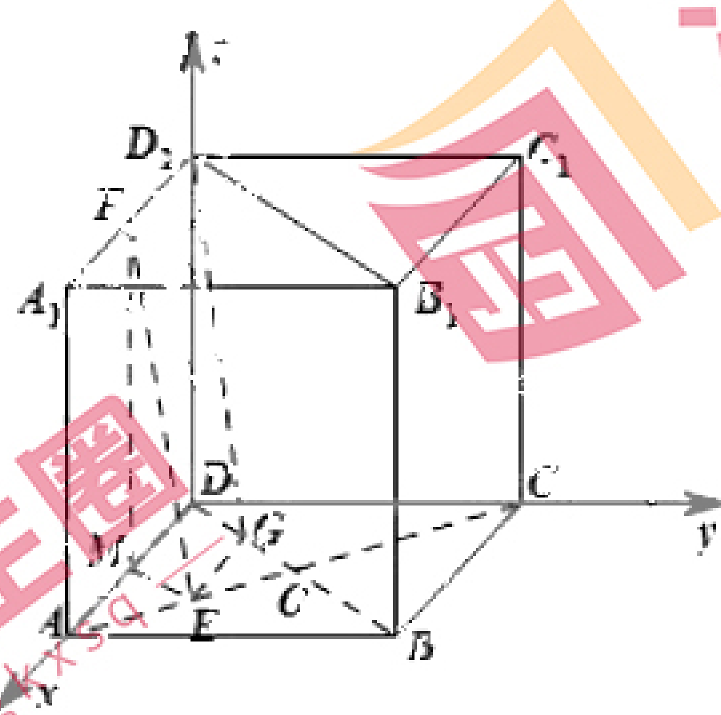
$V_{F-AEB}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle AEB}\cdot 2$为定值，A正确.

对于B，$\mu=\dfrac{1}{2}$时，F为A_1D_1的中点，设AC与BD交于点O，当E为OA中点时，取OD中点G，此时，$EG \overset{\parallel}{=} FD_1$，$\therefore EF \parallel D_1G \Rightarrow EF \parallel$平面$BDD_1B_1$，B正确.

对于C，过F作$FM \perp AD$于点M，$\therefore FM \perp$平面$ABCD$，$\therefore \beta=\angle FEM$，

$\alpha=\angle EFM$，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，C正确.

对于D，如图建系，$\therefore E(1,1,0)$，$F(1,0,2)$，



设$P(x,2,z),0\le x,z\le 2$，$\overrightarrow{PE}=(1-x,-1,-z)$，$\overrightarrow{PF}=(1-x,-2,2-z)$

$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(1-x)^2+2+z(z-2)=(1-x)^2+(z-1)^2+1\ge 1>0$，

$\therefore PE$与PF始终成锐角，D错，选ABC.

12．已知函数$f(x)$定义域为$\mathbf{R}$，$f(x+1)$是奇函数，$g(x)=(x-1)f(x)$，$f'(x)$，$g'(x)$分

别是函数 $f(x),g(x)$ 的导函数，函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,1]$ 上单调递增，则

A．$(1)=0$　　　　B．$f'(1+x)=f'(1-x)$

C．$g'(1+x)=g'(1-x)$　　　　D．$g(\mathrm{e}^{0.1})<g(1-\ln 1.1)<0$

【答案】ABD

【解析】对于 A，$\because f(x+1)$ 是奇函数，$\therefore f(1)=0$，A 正确.

对于 B，$f(x+1)$ 是奇函数 $\Rightarrow f(-x+1)=-f(x+1)$，$\therefore -f'(-x+1)=-f'(x+1)$，

$\therefore f'(1+x)=f'(1-x)$，B 正确.

对于 C，$g(1+x)=xf(1+x)$，$g(1-x)=-xf(1-x)$，$\therefore g(1+x)=g(1-x)$，

$\therefore g'(1+x)+g'(1-x)=0$，C 错.

对于 D，由 $g(1+x)=g(1-x)$ 知 $g(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，$\because g(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上$\nearrow$，

$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上$\swarrow$，$g(x)\le g(1)=0$，当且仅当 $x=1$ 时取“=”，

而 $\left|\mathrm{e}^{0.1}-1\right|>0.1>\ln 1.1>\left|1-\ln 1.1-1\right|$，$\therefore g(\mathrm{e}^{0.1})<g(1-\ln 1.1)<0$，D 正确.

选：ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．$\left(x+\dfrac{1}{x}+1\right)(x+1)^6$ 的展开式常数项是________.（用数字作答）

【答案】7

【解析】$(x+1)^6$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}$. $r=6$，$1\cdot C_6^6=1$，

$r=5$，$\dfrac{1}{x}C_6^5x^1=6$，$1+6=7$.

14．已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_3+a_7=-8$，$S_5=10$，则 $S_{10}=$________.

【答案】-55

【解析】$\begin{cases}a_1+2d+a_1+6d=-8\\ 5a_1+\dfrac{5\times 4}{2}d=10\end{cases}$，$\therefore \begin{cases}a_1=8\\ d=-3\end{cases}$，$S_{10}=10\times 8+\dfrac{10\times 9}{2}\times(-3)=-55$.

15．请写出一条同时满足下列两个条件的直线方程：________.

①过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点；

②与圆 $x^2+y^2-4x-2\sqrt{3}y-2=0$ 相交所得的弦长为 $4\sqrt{2}$.

【答案】$x=1$ 或 $x-\sqrt{3}y-1=0$

【解析】圆 $(x-2)^2+(y-\sqrt{3})^2=9$ ，圆心 $(2,\sqrt{3})$ ，$r=3$ ，弦长为 $4\sqrt{2}$

圆心到直线距离为 1 ，斜率不存在，$x=1$ 满足条件.

斜率存在，设 $y=k(x-1)$ ，即 $kx-y-k=0$ ，$\dfrac{\left|2k-\sqrt{3}-k\right|}{\sqrt{k^2+1}}=1$ ，$k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

此时 $l:x-\sqrt{3}y-1=0$ ，$\therefore l:x=1$ 或 $x-\sqrt{3}y-1=0$.

16．已知函数 $f(x)=(\ln x)^2-ax\ln x+ax^2$ 有三个不同的零点 x_1,x_2,x_3 ，且 $x_1<x_2<x_3$ ，则实数 a 的取值范围是________；$\left(1-\dfrac{\ln x_1}{x_1}\right)^2\left(1-\dfrac{\ln x_2}{x_2}\right)\left(1-\dfrac{\ln x_3}{x_3}\right)$ 的值为________.

【答案】$\left(-\dfrac{1}{e^2-e},0\right)$ ；1

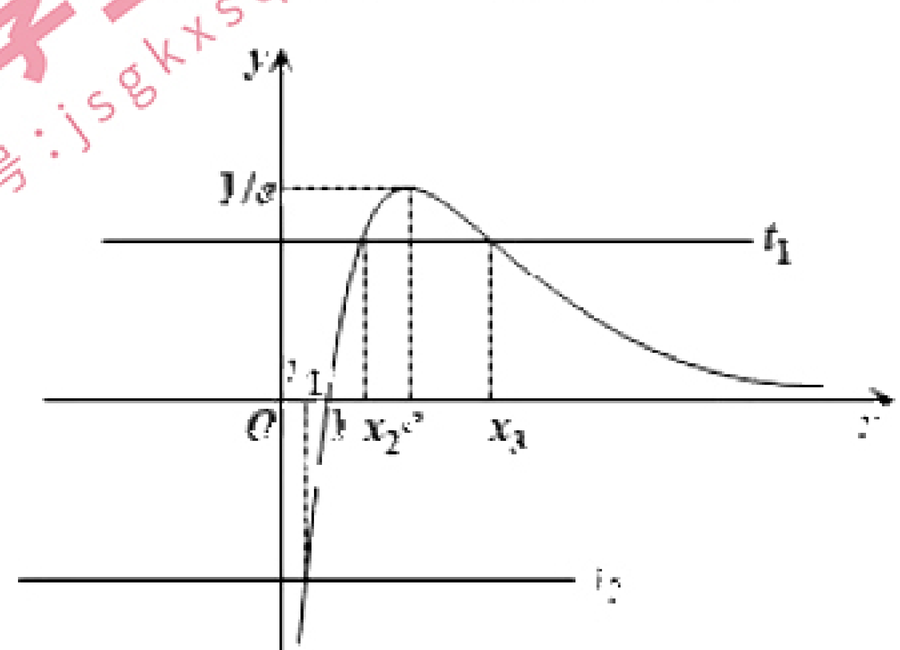
【解析】由 $(\ln x)^2-ax\ln x+ax^2=0\Rightarrow\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2-a\cdot\dfrac{\ln x}{x}+a=0$

令 $\dfrac{\ln x}{x}=t$ ，$\therefore t^2-at+a=0$ （ * ）

令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ，$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow x=e$

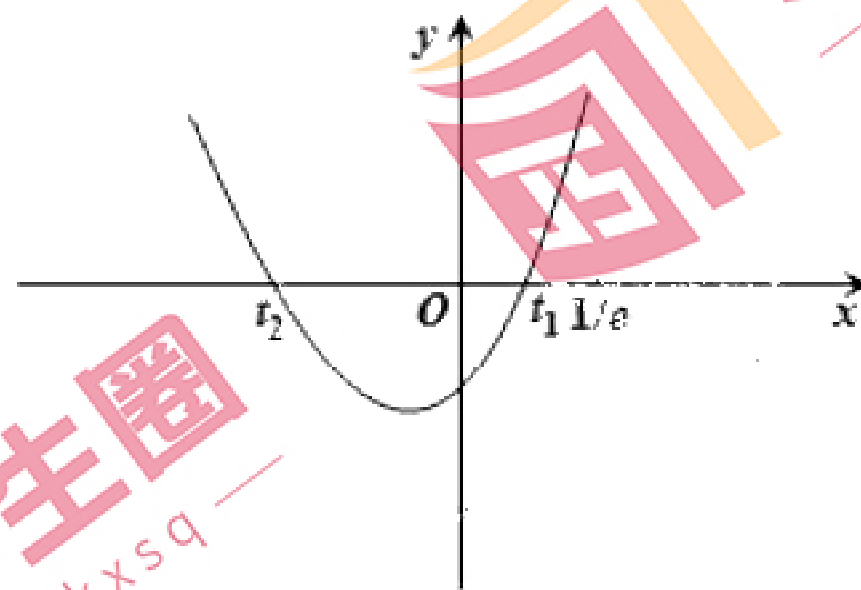
当 $0<x<e$ 时，$g'(x)>0,g(x)\nearrow$ ；当 $x>e$ 时，$g'(x)<0,g(x)\swarrow$

作出 $g(x)$ 大致图象如下，要使原方程有三个不同的零点，



（*）式关于t的一元二次方程有两个不等的实根t_1,t_2，其中$t_1\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，$t_2\in(-\infty,0)$

令$h(t)=t^2-at+a$，$\therefore\begin{cases}h(0)=a<0\\ h\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}^2}-\frac{\mathrm{e}}{a}+a>0\end{cases}\Rightarrow-\frac{1}{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}<a<0$



且$\frac{\ln x_1}{x_1}=t_2$，$\frac{\ln x_2}{x_2}=\frac{\ln x_3}{x_3}=t_1$，$\begin{cases}t_1+t_2=a\\ t_1t_2=a\end{cases}$，

$\therefore\left(1-\frac{\ln x_1}{x_1}\right)^2\cdot\left(1-\frac{\ln x_2}{x_2}\right)\left(1-\frac{\ln x_3}{x_3}\right)=(1-t_2)^2\cdot(1-t_1)^2=[1-(t_1+t_2)+t_1t_2]^2=1$

应填：$\left(-\frac{1}{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}},0\right)$；1.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且满足$2a-b=2c\cos B$.

（1）求角C；

（2）若$\triangle ABC$的面积为$3\sqrt{3}$，点D为AB中点，且$CD=\sqrt{13}$，求c边的长.

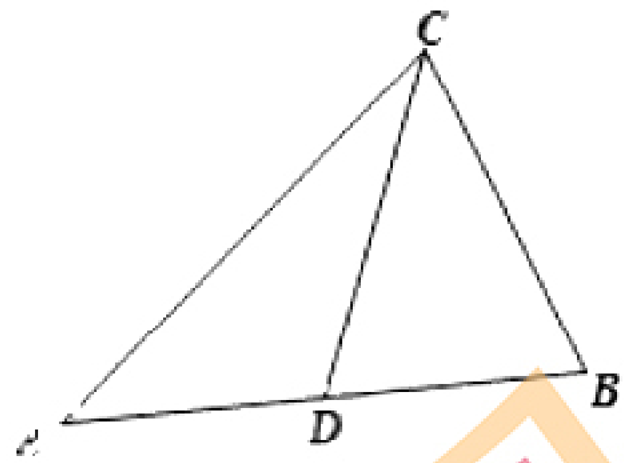
【解析】

（1）$2\sin A-\sin B=2\sin C\cos B$

$\Rightarrow 2\sin B\cos C+2\cos B\sin C-\sin B=2\sin C\cos B$

$\cos C=\frac{1}{2}$，$C=\frac{\pi}{3}$.

（2）$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$，$\therefore 4\times13=b^2+a^2+2ab\cdot\frac{1}{2}$，$\therefore a^2+b^2+ab=52$



而$\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\Rightarrow ab=12$，$a^2+b^2=40$，$c=\sqrt{a^2+b^2-ab}=\sqrt{40-12}=2\sqrt{7}$.

18.（12分）已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_n+a_{n+1}=3\cdot 2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式及它的前n项和S_n；

（2）设$b_n=\frac{S_n+1}{S_nS_{n+1}}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$T_n<1$.

【解析】

（1）设$\{a_n\}$公比为q，$\because a_n+a_{n+1}=3\cdot 2^{n-1}$

$\therefore\begin{cases}a_1+a_2=3, ①\\ a_2+a_3=6, ②\end{cases}$，$\frac{②}{①}\Rightarrow q=2$，$\therefore a_1+2a_1=3$，$a_1=1$

$\therefore a_n=2^{n-1}$，$\therefore S_n=\frac{1(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$.

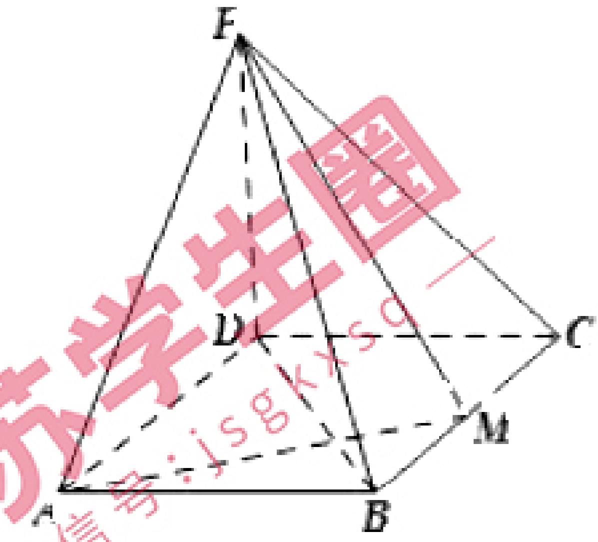
（2）$b_n=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$

$\therefore T_n=1-\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}<1$.

19.（12分）如图，四棱锥$P-ABCD$的底面是矩形，$PD\perp$底面$ABCD$，$AD=2\sqrt{2}$，$PD=DC=2$，M为BC的中点.

（1）求证：$AM\perp$平面PDB；

（2）求平面PAM与平面PBM夹角的余弦值.



【解析】

（1）证明：在矩形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=\angle ABM=90^\circ$，

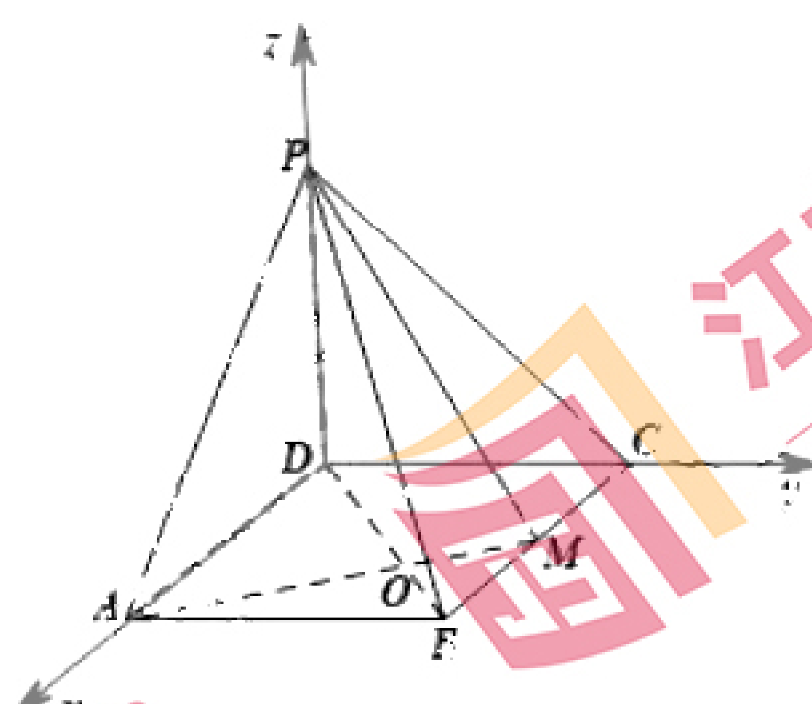
$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AB}{BM}=\sqrt{2}$，$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle BMA$，$\therefore \angle BAM=\angle ADB$

设 AM 与 BD 交于 O 点，$\therefore \angle DOM=\angle ADB+\angle DAM=\angle BAM+\angle DAM=90^\circ$

$\therefore AM\perp BD$，又 $\because PD\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PD\perp AM$，$BD\cap PD=D$，

$\therefore AM\perp$ 平面 PDB.

（2）如图建系，$\therefore P(0,0,2)$，$A(2\sqrt{2},0,0)$，$M(\sqrt{2},2,0)$，$B(2\sqrt{2},2,0)$.



$\therefore \overrightarrow{PA}=(2\sqrt{2},0,-2)$，$\overrightarrow{PM}=(\sqrt{2},2,-2)$，$\overrightarrow{BM}=(-\sqrt{2},0,0)$

设平面 PAM 与平面 PBM 的一个法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

$$\therefore \begin{cases} 2\sqrt{2}x_1-2z_1=0 \\ \sqrt{2}x_1+2y_1-2z_1=0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(\sqrt{2},1,2)$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x_2+2y_2-2z_2=0 \\ -\sqrt{2}x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(0,1,1)$$

设平面 PAM 与平面 PBM 所成角为 θ，

$$\therefore \cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{3}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}.$$

20.（12分）某校为了弘扬中华优秀传统文化，在校艺术节上举办班级“古诗词双人团体赛”，每班限报一队，每队两人，每队通过回答多个问题的形式进行竞赛.现甲，乙两队进行竞答比赛，比赛规则是：每轮比赛中每队仅派一人代表答题，两人都全部答对或者都没有全部答对则均记1分；一人全部答对而另一人没有全部答对，则全部答对的队伍记3分，没有全部答对的记0分.设每轮比赛中甲队全部答对的概率为 $\frac{3}{4}$，乙队全部答对的概率为 $\frac{2}{3}$，甲，乙两队答题相互独立，且每轮比赛互不影响.

（1）经过1轮比赛，设甲队的得分为 X，求 X 的分布列和期望；

（2）若比赛采取3轮制，请计算第3轮比赛后甲队累计得分低于乙队累计得分的概率

【解析】

（1）X 的所有可能取值为 $0,1,3$，

$P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$，$P(X=1)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$，$P(X=3)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

$\therefore X$ 的分布列如下：

X	0	1	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X)=\frac{7}{12}+\frac{3}{4}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}.$$

（2）甲队累计得分低于乙的情形为：①甲至少有2场负于乙；

②甲有一场负于乙，另两场打平.

所求概率为：$P=\left(\frac{1}{6}\right)^3+C_3^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{5}{6}+C_3^2\left(\frac{7}{12}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{211}{864}$

21．（12 分）已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，四点 $A\left(-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$B\left(1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$C(\sqrt{2},0)$，$D(1,1)$ 中恰有三点在椭圆 E 上.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）点 P 为椭圆 E 上的一动点，设直线 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2.

①求 $k_1\cdot k_2$ 的值；

②若不与坐标轴垂直的直线 l 交椭圆 E 于 M,N 两点，O 为坐标原点，$OM\parallel PA$，$ON\parallel PB$，求 $\triangle OMN$ 的面积.

【解析】

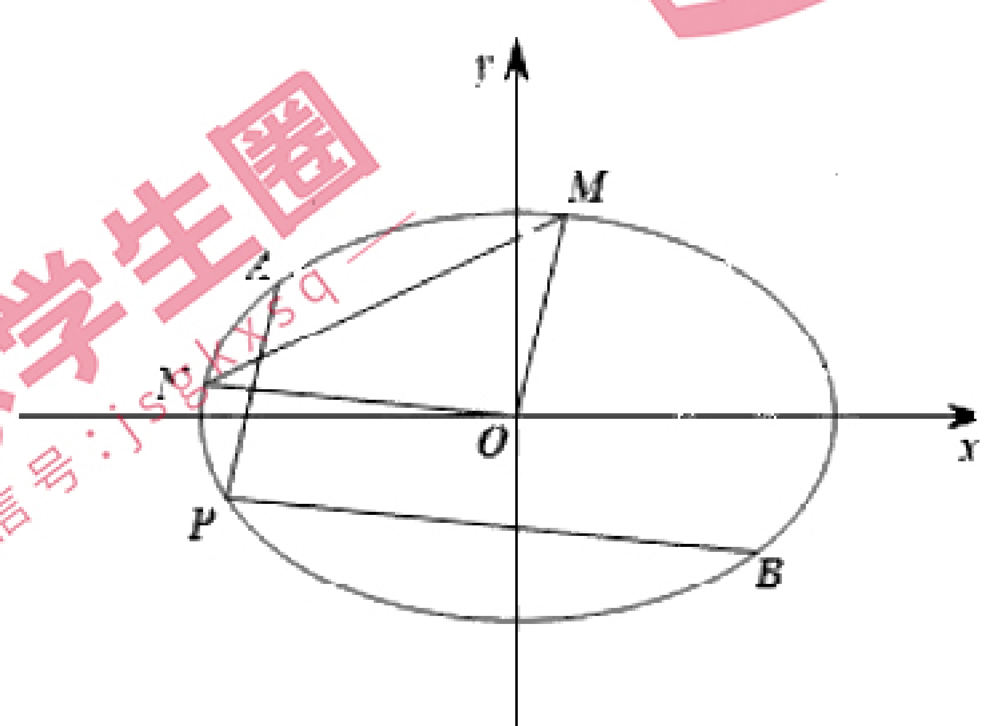
（1）显然 A,B 在 E 上，D 不可能在 E 上，C 在 E 上，

$\therefore a=\sqrt{2}$，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2b^2}=1\Rightarrow b=1$，$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）①设 $P(x_0,y_0)$，$\therefore \dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$，

$$k_1\cdot k_2=\frac{y_0-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x_0+1}\cdot\frac{y_0+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x_0-1}=\frac{y_0^2-\frac{1}{2}}{x_0^2-1}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{x_0^2}{2}}{x_0^2-1}=-\frac{1}{2}.$$

②$\because OM\parallel PA$，$ON\parallel PB$，$\therefore k_{OM}\cdot k_{ON}=-\dfrac{1}{2}$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$



$\therefore \dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-\dfrac{1}{2}$，即 $y_1y_2=-\dfrac{1}{2}x_1x_2$

且$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{2}+y_1^2=1\\ \dfrac{x_2^2}{2}+y_2^2=1\end{cases}\Rightarrow \dfrac{x_1^2x_2^2}{4}+\dfrac{1}{2}x_1^2y_2^2+\dfrac{1}{2}x_2^2y_1^2+y_1^2y_2^2=1$

$\Rightarrow\left(\dfrac{x_1x_2}{2}+y_1y_2\right)^2+\dfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)^2=1\Rightarrow|x_1y_2-x_2y_1|=\sqrt{2}$

$\therefore S_{\triangle MON}=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

22.（12分）已知函数$f(x)=a\ln(x+1)+(x+1)^2$，$g(x)=e^{2x}+ax,a\in\mathbf{R}$.

（1）若函数$f(x)$与$g(x)$有相同的极小值点，求a的值；

（2）若对任意$x\in[0,+\infty)$，恒有$g(x)\geq f(x)$，求a的取值范围.

【解析】

（1）①当$a\geq0$时，$f(x)$在$(-1,+\infty)$上↗，$g(x)$在$\mathbf{R}$上↗，$f(x)$与$g(x)$均无极小值，舍去；

②当$a<0$时，$f'(x)=\dfrac{a}{x+1}+2(x+1)=\dfrac{2(x+1)^2+a}{x+1}=0\Rightarrow x=\sqrt{-\dfrac{a}{2}}-1$

当$-1<x<\sqrt{-\dfrac{a}{2}}-1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$↙；当$x>\sqrt{-\dfrac{a}{2}}-1$时，$f'(x)>0,f(x)$↗

$\therefore f(x)$的极小值点为$\sqrt{-\dfrac{a}{2}}-1$.

$g'(x)=2e^{2x}+a$，令$g'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)$

当$x<\dfrac{1}{2}\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)$，$g'(x)<0,g(x)$↙；当$x>\dfrac{1}{2}\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)$时，$g'(x)>0,g(x)$↗

$\therefore g(x)$的极小值点为$\dfrac{1}{2}\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)$，$\because f(x)$与$g(x)$有相同的极小值点

$\therefore\sqrt{-\dfrac{a}{2}}-1=\dfrac{1}{2}\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)=\ln\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$，而$\ln x\leq x-1$，当且仅当$x=1$时取“=”，

$\therefore \sqrt{-\frac{a}{2}}=1$，$a=-2$.

（2）**方法一**：由$e^{2x}+ax\ge a\ln(x+1)+(x+1)^2=e^{2\ln(x+1)}+a\ln(x+1)$

令$F(x)=e^{2x}+ax$，由$F(x)\ge F(\ln(x+1))$，而$x\ge\ln(x+1)$

易得$F(x)$在$[0,+\infty)$上↗，$\therefore F'(x)=2e^{2x}+a\ge 0$对$\forall x\in[0,+\infty)$恒成立，

$\therefore a\ge(-2e^{2x})_{\max}=-2$.

方法二：由$e^{2x}+ax-a\ln(x+1)-(x+1)^2\ge 0$对$\forall x\in[0,+\infty)$恒成立

令$F(x)=e^{2x}+ax-a\ln(x+1)-(x+1)^2$，$\therefore F(x)\ge F(0)$

$F'(x)=2e^{2x}+a-\frac{a}{x+1}-2(x+1)$，$F'(0)=0$

$F''(x)=4e^{2x}+\frac{a}{(x+1)^2}-2$，$F''(0)=2+a\ge 0\Rightarrow a\ge -2$（必要性）

下证充分性，当$a\ge -2$时，$x\ge 0$时$F'(x)\ge 2e^{2x}-2(x+1)-\frac{2x}{x+1}$

$\ge 2(2x+1)-2x-2-\frac{2x}{x+1}=\frac{2x^2}{x+1}\ge 0$，

$\therefore F(x)$在$[0,+\infty)$上↗，$F(x)\ge F(0)=0$，符合

综上：$a\ge -2$.