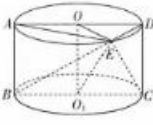


### 高三数学考试参考答案(理科)

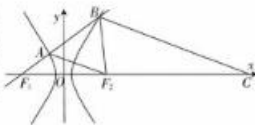
1. C 因为  $\complement_U B = \{-1, 0, 2\}$ ,  $A = \{-1, 1, 2\}$ , 所以  $A \cap (\complement_U B) = \{-1, 2\}$ .
2. A  $z = \frac{7-i}{1-3i} = \frac{(7-i)(1+3i)}{10} = \frac{10+20i}{10} = 1+2i$ .
3. D 因为  $f(x) = \sin(2x + \frac{3\pi}{10})$ , 所以  $f(\frac{3\pi}{10}) = \sin(2 \times \frac{3\pi}{10} + \frac{3\pi}{10}) \neq \pm 1$ ,  $f(\frac{\pi}{4}) = \sin(2 \times \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{10}) \neq 0$ , A 错误, B 错误. 显然  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$ , C 错误. 将  $f(x)$  图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 可得函数  $y = \sin(x + \frac{3\pi}{10})$  的图象, D 正确.
4. C 因为  $DE$  是  $\triangle ABC$  的中位线, 所以  $DE \parallel AB$ ,  $DE = \frac{1}{2}AB = 1$ ,  $\angle ADE = \angle BAD = \frac{\pi}{6}$ . 又  $AD = \sqrt{3}$ , 所以  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE} = \sqrt{3} \times 1 \times \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$ .
5. A 因为  $y' = -\frac{3}{(x-3)^2}$ , 所以所求切线的斜率  $k = -\frac{3}{(2-3)^2} = -3$ , 故该切线的方程为  $y = -3x + 4$ .
6. B 因为  $e_2 = \frac{5}{6}e_1$ , 所以  $\sqrt{1 - \frac{b^2}{9}} = \frac{5}{6} \times \sqrt{1 - \frac{1}{5}}$ , 解得  $b = 2$ .
7. D 令  $u = x(2x - a)$ , 因为  $y = 3^x$  是增函数, 所以  $u = x(2x - a)$  在区间  $(-\infty, 1)$  上单调递减, 所以  $\frac{a}{4} \geq 1$ , 解得  $a \geq 4$ .
8. A 因为  $b \cos C - c \cos B = a$ , 所以  $\sin B \cos C - \cos B \sin C = \sin A$ , 整理得  $\sin B \cos C - \cos B \sin C = \sin B \cos C + \cos B \sin C$ , 所以  $\cos B \sin C = 0$ . 因为  $\sin C > 0$ , 所以  $\cos B = 0$ . 又  $B \in (0, \pi)$ , 所以  $B = \frac{\pi}{2}$ , 从而  $A + C = \frac{\pi}{2}$ . 又  $A = 2C$ , 所以  $C = \frac{\pi}{6}$ .
9. B 四棱锥体积  $V_{E-ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot d$ , 其中  $d$  为  $E$  到  $AD$  的距离,  因为正方形  $ABCD$  的面积为定值, 所以当  $E$  为  $\widehat{AD}$  的中点时, 四棱锥的体积最大, 连接  $OE, O_1E$ , 此时其侧面积  $S = \frac{1}{2}AD \cdot OE + \frac{1}{2}AB \cdot AE + \frac{1}{2}CD \cdot DE + \frac{1}{2}BC \cdot O_1E = 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$ .
10. C 甲家庭的站法有  $A_3^3 A_3^3 = 12$  种, 乙家庭的站法有  $A_3^3 A_3^3 = 72$  种, 最后将两个家庭的整体全排列, 有  $A_3^3 = 2$  种站法, 则所有不同站法的种数为  $12 \times 72 \times 2 = 1728$ .
11. C 因为  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200[(80-m)(50-m) - (20+m)(50+m)]^2}{100 \times 100 \times 130 \times 70} = \frac{8(15-m)^2}{91} \geq 3.841$ , 所以  $(15-m)^2 \geq 43.7$ , 又  $5 \leq m \leq 15$ , 所以  $15-m \geq 7$ , 解得  $m \leq 8$ , 故在被调查的 100 名女生中喜欢观看体育比赛直播的人数的最大值为 58.



【高三数学·参考答案 第 1 页(共 6 页)理科】



12. D 因为  $\overrightarrow{CB} = 4\overrightarrow{F_1A}$ , 所以  $\triangle F_1AF_2 \sim \triangle F_1BC$ . 设  $|F_1F_2| = 2c$ , 则  $|F_2C| = 6c$ , 设  $|AF_1| = t$ , 则  $|BF_1| = 4t$ ,  $|AB| = 3t$ . 因为  $BF_2$  平分  $\angle F_1BC$ , 由角平分线定理可知,  $\frac{|BF_1|}{|BC|} = \frac{|F_1F_2|}{|F_2C|} = \frac{2c}{6c} = \frac{1}{3}$ , 所以  $|BC| = 3|BF_1| = 12t$ , 所以  $|AF_2| = \frac{1}{4}|BC| = 3t$ . 由双曲线定义知  $|AF_2| - |AF_1| = 2a$ , 即  $3t - t = 2a$ , 解得  $t = a$ . 又由  $|BF_1| - |BF_2| = 2a$ , 得  $|BF_2| = 4t - 2a = 2t = 2a$ , 所以  $|AB| = |AF_2| = 3a$ , 即  $\triangle ABF_2$  是等腰三角形. 由余弦定理知  $\cos \angle F_1BF_2 = \frac{|BF_1|^2 + |BF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|BF_1||BF_2|} = \frac{|BA|^2 + |BF_2|^2 - |AF_2|^2}{2|AB||BF_2|}$ , 即  $\frac{16a^2 + 4a^2 - 4c^2}{16a^2} = \frac{1}{3}$ , 化简得  $11a^2 = 3c^2$ , 所以  $8a^2 = 3b^2$ , 则双曲线  $\Gamma$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}x$ .



13. -4 画出可行域(图略)知, 当直线  $z = 2x - y$  过点  $(-3, -2)$  时,  $z$  取得最小值 -4.

14. 6; 17 执行程序框图,

$$n=1, S=0, S=-S+2^1=2, n=2, \text{满足 } 2 \leq P;$$

$$S=(-1)^2 S+2^2=6, n=3, \text{满足 } 6 \leq P;$$

$$S=(-1)^3 S+2^3=2, n=4, \text{满足 } 2 \leq P;$$

$$S=(-1)^4 S+2^4=18, n=5, \text{满足 } 18 > P.$$

所以  $6 \leq P \leq 17, P \in \mathbf{N}^*$ , 所以正整数  $P$  的最小值和最大值分别为 6 和 17.

15.  $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$  设这个黄金三角形的另一个底角为  $B$ , 顶角为  $A$ , 因为  $\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , 所以  $\cos C = \frac{BC}{2AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ , 则  $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ .

16. 8 设  $\triangle ABC$  的外接圆半径为  $r$ , 边长为  $a$ , 正三棱柱的高为  $2h$ , 则  $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, (\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2 = 2^2 - h^2$ , 即  $a^2 = 12 - 3h^2$ , 所以正三棱柱的体积  $V = S_{\triangle ABC} \times 2h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3(4 - h^2)h = \frac{3\sqrt{3}}{2}(-h^3 + 4h)$ . 又  $V' = \frac{3\sqrt{3}}{2}(-3h^2 + 4)$ , 当  $h \in (0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$  时,  $V' > 0$ , 此时函数单调递增, 当  $h \in (\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2)$  时,  $V' < 0$ , 此时函数单调递减, 所以当  $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  时, 函数  $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}(-h^3 + 4h)$  取得最大值  $\frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times (4 - \frac{4}{3}) = 8$ .

17. (1) 证明: 由  $na_{n+1} = 3(n+1)a_n$ , 得  $a_{n+1} = \frac{3(n+1)a_n}{n}$ , ..... 1 分

所以  $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{3a_n}{n}$ , ..... 3 分



故  $(\frac{a_n}{n})$  是公比为 3 的等比数列. .... 4 分

(2) 解: 由(1)得  $\frac{a_n}{n} = \frac{3}{1} \times 3^{n-1} = 3^n$ , 则  $a_n = n \times 3^n, b_n = \frac{n}{3^n}$ . .... 6 分

所以  $T_n = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n}$ ,

所以  $\frac{1}{3} T_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^{n+1}}$ . .... 7 分

两式相减, 得  $\frac{2}{3} T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}$ , .... 9 分

所以  $\frac{2}{3} T_n = \frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}}$ , .... 11 分

解得  $T_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \times 3^n}$ . .... 12 分

18. 解: (1) 由题意知  $100 \times (0.0010 \times 2 + 0.0035 + a + 0.0020) = 1$ ,

解得  $a = 0.0025$ . .... 1 分

分数段  $[450, 550)$  对应的频率为 0.1,  $[550, 650)$  对应的频率为 0.35,  $[650, 750)$  对应的频率为 0.25, 设中位数为  $x$ , 则  $x \in [650, 750)$ . .... 3 分

由  $0.1 + 0.35 + (x - 650) \times 0.0025 = 0.5$ , 解得  $x = 670$ . .... 5 分

(2) 由题意知从分数段  $[650, 750)$  对应的学生中抽取 5 人, 从  $[850, 950]$  对应的学生中抽取 2 人, 随机变量  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2. .... 7 分

则  $P(X=0) = \frac{C_5^3 C_2^2}{C_7^5} = \frac{2}{7}$ , .... 8 分

$P(X=1) = \frac{C_5^2 C_2^3}{C_7^5} = \frac{4}{7}$ , .... 9 分

$P(X=2) = \frac{C_5^1 C_2^4}{C_7^5} = \frac{1}{7}$ , .... 10 分

随机变量  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2
$P$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

..... 11 分

所以  $E(X) = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$ . .... 12 分

19. (1) 证明: 因为  $DE$  为  $\triangle ABC$  的中位线,

所以  $DE \parallel AB$ . .... 1 分

因为  $AC \perp AB$ , 所以  $DE \perp AC, DE \perp PE$ , .... 3 分

又  $AC \cap PE = E$ , 所以  $DE \perp$  平面  $PAC$ , .... 4 分

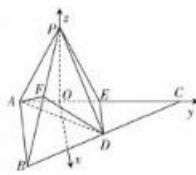


因为  $DE \subset$  平面  $ABDE$ , 所以平面  $PAE \perp$  平面  $ABDE$ . ..... 5分

(2)解:取  $AE$  的中点  $O$ , 连接  $PO$ , 因为  $PA=PE=AE$ , 所以  $PO \perp AE$ .

因为平面  $PAE \perp$  平面  $ABDE$ , 所以  $PO \perp$  平面  $ABDE$ , 且  $PO = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

..... 6分  
分别以  $\vec{OC}, \vec{OP}$  的方向为  $y, z$  轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则  $P(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}), B(\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, 0), D(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 0), A(0, -\frac{1}{2}, 0), F(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ ,

所以  $\vec{AP} = (0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \vec{AD} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 0), \vec{AF} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ . ..... 8分

设  $\mathbf{n} = (x, y, z)$  是平面  $ADF$  的法向量, 可得 
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x + y = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{4}z = 0, \end{cases}$$
 令  $x = \sqrt{2}$ , 得  $\mathbf{n} = (\sqrt{2},$

$-1, -\sqrt{3})$ . ..... 10分

则  $\cos(\vec{AP}, \mathbf{n}) = \frac{\mathbf{n} \cdot \vec{AP}}{|\mathbf{n}| |\vec{AP}|} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\sqrt{6} \times 1} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ ,

所以  $PA$  与平面  $ADF$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ . ..... 12分

20. (1)解: 当  $a=e$  时, 因为  $f(x) = e^x + (1-e)x - 1$ , 所以  $f'(x) = e^x + 1 - e$ . ..... 1分

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \ln(e-1)$ . ..... 2分

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln(e-1))$  上单调递减, 在  $(\ln(e-1), +\infty)$  上单调递增. .... 4分

(2)证明: (法一) 易知当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $\ln x < x - 1, \ln \frac{1}{x} < \frac{1}{x} - 1$ , 所以  $1 < \frac{x-1}{\ln x} < x$ . ...

..... 6分

由题设知  $a > 1, f'(x) = a^x \ln a + 1 - a$ . ..... 7分

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x_0 = \frac{\ln \frac{a-1}{\ln a}}{\ln a}$ . ..... 8分

由上可知  $1 < \frac{a-1}{\ln a} < a, 0 < \ln \frac{a-1}{\ln a} < \ln a$ , 故  $0 < x_0 < 1$ . ..... 10分

当  $x < x_0$  时,  $f'(x) < 0, f(x)$  单调递减, 当  $x > x_0$  时,  $f'(x) > 0, f(x)$  单调递增. .... 11分

又  $f(0) = f(1) = 0$ , 所以当  $0 < x < 1$  时,  $f(x) < 0$ . ..... 12分

(法二) 因为  $f'(x) = a^x \ln a + 1 - a$ , 且  $a > 1$ , 所以  $f'(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增. .... 5分

又  $f'(0) = \ln a + 1 - a$ , 设  $g(a) = \ln a + 1 - a$ , 则  $g'(a) = \frac{1}{a} - 1 < 0$ , 可知  $g(a)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 所以  $g(a) < g(1) = 0$ , 即  $f'(0) < 0$ . ..... 7分



【高三数学·参考答案 第4页(共6页)理科】



- 又  $f'(1) = a \ln a + 1 - a$ , 设  $h(a) = a \ln a + 1 - a$ , 则  $h'(a) = \ln a > 0$ , 可知  $h(a)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $h(a) > h(1) = 0$ , 即  $f'(1) > 0$ . ..... 9 分
- 所以存在唯一的  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f'(x_0) = 0$ , 且  $f(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递减, 在  $(x_0, 1)$  上单调递增. .... 11 分
- 因为  $f(0) = f(1) = 0$ , 所以当  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) < 0$ . .... 12 分
21. (1) 解: 由题意可得, 抛物线  $C_1: y^2 = 8x$  的焦点为  $F(2, 0)$ , 准线  $l: x = -2$ . .... 1 分
- 不妨设点  $M(a, b)$  ( $a > 0, b > 0$ ), 则  $|MF| = a + 2 = 10$ , 即  $a = 8$ , 可得  $b^2 = 64$ , 即  $b = 8$ .  
所以  $M(8, 8)$ , 则直线  $MF$  的斜率  $k_{MF} = \frac{8-0}{8-2} = \frac{4}{3}$ . .... 3 分
- 因为  $FM \perp FN$ , 所以直线  $NF$  的斜率  $k_{NF} = -\frac{3}{4}$ , 所以直线  $NF$  的方程为  $y = -\frac{3}{4}(x-2)$ ,  
令  $x = -2$ , 解得  $y = 3$ , 即  $N(-2, 3)$ , 故  $|NF| = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-0)^2} = 5$ . .... 5 分
- (2) 证明: 设  $P(t, y_0)$ , 由  $t \neq m \pm r, y_0 \neq \pm m$ , 知过  $P$  所作圆  $C_2$  的切线的斜率  $k$  存在且非零, 每条切线都与  $C_1$  有两个交点, 设切线方程为  $y - y_0 = k(x - t)$ , 即  $kx - y + (y_0 - kt) = 0$ , 故  $\frac{|km + y_0 - kt|}{\sqrt{1+k^2}} = r$ , 整理得  $[(m-t)^2 - r^2]k^2 + 2y_0(m-t)k + (y_0^2 - r^2) = 0$ . ① ..... 7 分
- 则过  $P$  所作的两条切线  $PA, PC$  的斜率  $k_1, k_2$  分别是方程①的两个实根,  
故有  $k_1 + k_2 = \frac{2y_0(t-m)}{(m-t)^2 - r^2}, k_1 k_2 = \frac{y_0^2 - r^2}{(m-t)^2 - r^2}$ . ② ..... 8 分
- 联立  $\begin{cases} y - y_0 = k(x - t), \\ y^2 = 8x, \end{cases}$  消去  $x$  得  $ky^2 - 8y + 8(y_0 - kt) = 0$ , ③
- 设点  $A, B, C, D$  的纵坐标分别为  $y_1, y_2, y_3, y_4$ , 由③得  $y_1 y_2 = 8(\frac{y_0}{k_1} - t)$ ,  
同理可得  $y_3 y_4 = 8(\frac{y_0}{k_2} - t)$ . .... 9 分
- 于是得  $y_1 y_2 y_3 y_4 = 64(\frac{y_0}{k_1} - t)(\frac{y_0}{k_2} - t) = 64[\frac{y_0^2 - t y_0(k_1 + k_2)}{k_1 k_2} + t^2]$ .  
设  $y_0^2 - t y_0(k_1 + k_2) = \lambda k_1 k_2$  (其中  $\lambda$  为常数),  
把②式代入整理得  $y_0^2(m^2 - t^2 - r^2 - \lambda) + \lambda r^2 = 0$ . .... 10 分
- 欲使上式与  $y_0$  的取值无关, 则当且仅当常数  $\lambda = 0$  且  $m^2 = t^2 + r^2$  ( $r \neq 0$ ) 时,  $A, B, C, D$  四点的纵坐标乘积为定值  $64t^2$ . .... 12 分
22. 解: (1) 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 + 3\cos \alpha, \\ y = -2 + 3\sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数), 其普通方程为  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ , 即  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ . .... 2 分
- 则  $C_1$  的极坐标方程为  $\rho^2 - 2\rho \cos \theta + 4\rho \sin \theta - 4 = 0$ . .... 3 分
- 直线  $C_2$  的方程为  $y = \sqrt{3}x$ ,  
所以直线  $C_2$  的极坐标方程为  $\theta = \frac{\pi}{3}$  ( $\rho \in \mathbf{R}$ ). .... 5 分



【高三数学·参考答案 第 5 页(共 6 页)理科】



- (2) 设  $M(\rho_1, \theta), N(\rho_2, \theta)$ ,  
 将  $\theta = \frac{\pi}{3} (\rho \in \mathbf{R})$  代入  $\rho^2 - 2\rho \cos \theta + 4\rho \sin \theta - 4 = 0$ , ..... 7分  
 得  $\rho^2 + (2\sqrt{3} - 1)\rho - 4 = 0$ , ..... 8分  
 所以  $\rho_1 \rho_2 = -4$ , ..... 9分  
 所以  $|OM| \cdot |ON| = |\rho_1 \rho_2| = 4$ , ..... 10分
23. 解: (1) 化简得  $|x+2| - 2|x-1| > -3$ , ..... 1分  
 当  $x \geq 1$  时, 解得  $x < 7$ , 所以  $1 \leq x < 7$ ; ..... 2分  
 当  $x \leq -2$  时, 解得  $x > 1$ , 此时无解; ..... 3分  
 当  $-2 < x < 1$  时, 解得  $x > -1$ , 所以  $-1 < x < 1$ . ..... 4分  
 综上所述, 原不等式的解集为  $(-1, 7)$ . ..... 5分
- (2) 因为  $f(x) = \begin{cases} -3, & x \leq -2, \\ 2x+1, & -2 < x < 1, \\ 3, & x \geq 1, \end{cases}$  ..... 7分  
 所以  $f(x)_{\max} = 3$ . ..... 8分  
 由题意知  $|1-m| \leq 3$ , 解得  $-2 \leq m \leq 4$ ,  
 所以  $m$  的取值范围是  $[-2, 4]$ . ..... 10分



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 ([网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

