绝密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

2023—2024 学年高三质量检测（一）

数学试卷

2023.08

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，正确粘贴条形码；
2. 作答选择题时，用2B铅笔在答题卡上将对应答案的选项涂黑；
3. 非选择题的答案必须写在答题卡各题目的指定区域内相应位置上；不准使用铅笔和涂改液；不按以上要求作答无效；
4. 考试结束后，考生上交答题卡。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{x\,|\,2^x\leqslant 1\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{0,1,2\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{-2,-1,0\}$　　D．$\{-2,-1\}$

2．已知复数 z 满足 $z\mathrm{i}=1+2\mathrm{i}$，则 $\overline{z}$ 的虚部为

A．1　　B．-1　　C．2　　D．-2

3．已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

4．已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{ax}+1)}{x}-\dfrac{3}{2}$ 为奇函数，则 $a=$

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．2　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．3

5．“$a\geqslant\sqrt{5}$”是“圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2:(x+a)^2+(y-2a)^2=36$ 存在公切线”的

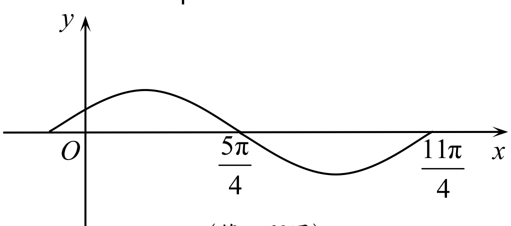
A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．已知函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的图象大致如图，则 $f(\dfrac{25\pi}{4})=$

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．1



（第 6 题图）

7．数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_2=3$，$a_{n+1}=a_na_{n+2}$，则$a_{2024}=$

A．2　　B．3　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

8．已知一个圆锥的母线长为10，高为8，则该圆锥内切球的表面积与圆锥的表面积之比为

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{3}{13}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9．若随机变量$X\sim N(10,2^2)$，则

A．$P(X\geqslant 10)=0.5$

B．$P(X\leqslant 8)+P(X\leqslant 12)=1$

C．$P(8\leqslant X\leqslant 14)=P(10\leqslant X\leqslant 16)$

D．$D(2X+1)=8$

10．已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(x+1)$为偶函数，$f(3x+2)$为奇函数，则

A．$f(x)$的图象关于$x=1$对称

B．$f(x)$的图象关于$(1,0)$对称

C．$f(x+4)=f(x)$

D．$\sum_{i=0}^{20}f(i)=1$

11．已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，左、右焦点分别为$F_1,F_2$，上顶点为$P$，若过$F_1$且倾斜角为$30°$的直线$l$交椭圆$E$于$A,B$两点，$\triangle PAB$的周长为8，则

A．直线PF_2的斜率为$-\sqrt{3}$

B．椭圆E的短轴长为4

C．$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=2$

D．四边形$APBF_2$的面积为$\frac{48}{13}$

12．欧拉是人类历史上最伟大的数学家之一．在数学史上，人们称18世纪为欧拉时代．直到今天，我们在数学及其应用的众多分支中，常常可以看到欧拉的名字，如著名的欧拉函数．欧拉函数$\varphi(n)\,(n\in\mathbf{N}^*)$的函数值等于所有不超过正整数$n$且与$n$互素的正整数的个数，例如$\varphi(1)=1$，$\varphi(4)=2$，则下列说法正确的是

A．$\varphi(15)=\varphi(3)\varphi(5)$

B．$\forall n_1>n_2$，都有　$\varphi(n_1)\geqslant\varphi(n_2)$

C．方程$\varphi(n)=n-1\,(n\in\mathbf{N}^*)$有无数个根

D．$\varphi(7^k)=6\times 7^{k-1}\,(k\in\mathbf{N}^*)$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知α为锐角，$\tan\alpha=2$，则$\sin\alpha+\cos\alpha=$______________.

14．$(x^2+\frac{2}{x})^6$的展开式中，x^3的系数为______________.

15．过抛物线$C:y^2=4x$焦点F的直线l交抛物线C于A，B两点，且$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，若$M$为$AB$的中点，则$M$到$y$轴的距离为______________.

16．正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，底面$ABCD$内（含边界）的动点P到直线CC_1的距离与到平面ADD_1A_1的距离相等，则三棱锥$P-AB_1D_1$体积的取值范围为______________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 为正项等差数列，数列 $\{b_n\}$ 为递增的正项等比数列，$a_1=1$，$a_1-b_1=a_2-b_2=a_4-b_3=0$.

（1）求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

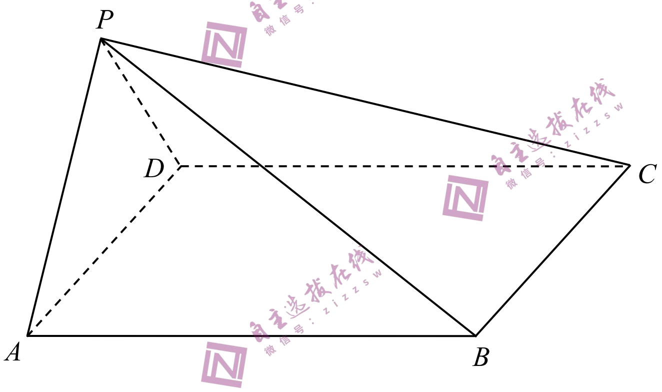
（2）数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\begin{cases} a_n, n\text{为奇数} \\ b_n, n\text{为偶数} \end{cases}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项的和.

18．（12 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AB\perp PD$.

（1）证明：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）若 $PA=PD$，$\angle PDA=60°$，求平面 PAD 与平面 PBC 夹角的余弦值.



（第 18 题图）

19．（12 分）

已知 a,b,c 分别为三角形△ABC 三个内角 A,B,C 的对边，且 $c\cos B+3b\cos C=a-b$.

（1）求 C；

（2）若 $a=5$，$\cos B=\dfrac{13}{14}$，D 为 AB 边上一点，且 $BD=5$，求△ACD 的面积.

20．（12 分）

某厂生产的产品每 10 件包装成一箱，每箱含 0，1，2 件次品的概率分别为 0.8，0.1，0.1. 在出厂前需要对每箱产品进行检测，质检员甲拟定了一种检测方案：开箱随机检测该箱中的 3 件产品，若无次品，则认定该箱产品合格，否则认定该箱产品不合格.

（1）在质检员甲认定一箱产品合格的条件下，求该箱产品不含次品的概率；

（2）若质检员甲随机检测一箱中的 3 件产品，抽到次品的件数为 X，求 X 的分布列及期望.

21．（12 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-mx\ (m\in \mathbf{R})$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x\geqslant 0$ 时，若关于 x 的不等式 $f(x)+\ln(x+1)-1\geqslant 0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

22．（12 分）

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，且 $|F_1F_2|=4$，若 C 上的点 M 满足 $\big||MF_1|-|MF_2|\big|=2$ 恒成立.

（1）求 C 的方程；

（2）若过点 M 的直线 l 与 C 的两条渐近线交于 P，Q 两点，且 $|MP|=|MQ|$.

（i）证明：l 与 C 有且仅有一个交点；

（ii）求 $\dfrac{1}{|OP|}+\dfrac{2}{|OQ|}$ 的取值范围.