2022年普通高等学校招生全国统一考试(模拟)

数　学

2022.5

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.若复数z满足$z(1+i)=2$，则$z=$

A.$-1-i$　　B.$-1+i$　　C.$1-i$　　D.$1+i$

2.设集合$A=\{x|-2\leq x\leq 1\}$，$B=\{y|y=2^x\}$，则$A\cap B=$

A.$\varnothing$　　B.$(0,1]$　　C.$[-2,0)$　　D.$(0,+\infty)$

3.已知平面向量$\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,y)$，若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$

A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.$\sqrt{5}$　　D.$\sqrt{10}$

4.已知双曲线$C:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦距为$4\sqrt{5}$，实轴长为4，则$C$的渐近线方程为

A.$y=\pm 2x$　　B.$y=\pm\sqrt{5}x$　　C.$y=\pm\frac{1}{2}x$　　D.$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}x$

5.已知随机变量ξ服从正态分布$N(3,\sigma^2)$，且$P(\xi<5)=0.7$，则$P(1<\xi<3)=$

A.0.6　　B.0.5　　C.0.3　　D.0.2

6.一个公司有8名员工，其中6位员工的月工资分别为6200、6300、6500、7100、7500、7600，另两位员工的月工资数据不清楚，那么8位员工月工资的中位数不可能是

A.6800　　B.7000　　C.7200　　D.7400

7.已知$(ax^2+1)(x-\frac{2}{x})^5$的展开式中各项系数的和为$-3$，则该展开式中$x$的系数为

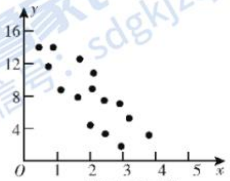
A.-120　　B.-40　　C.40　　D.120

8.我国古代数学家秦九韶在《数书九章》中记述了“三斜求积术”，即在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，则$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}$.根据此公式，若$a\cos B+(b-\sqrt{2}c)\cos A=0$，且$b^2+c^2-a^2=\sqrt{2}$，则$\triangle ABC$的面积为

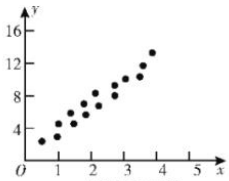
A.$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9.对两组数据进行统计后得到的散点图如下图，关于其线性相关系数的结论正确的是



线性相关系数r_1



线性相关系数r_2

A.$r_1<0$　　B.$r_2>1$　　C.$r_1+r_2>0$　　D.$|r_1|>|r_2|$

10.已知$a,b\in\mathbf{R}$，则使“$a+b>1$”成立的一个必要不充分条件是

A.$a^2+b^2>1$　　B.$|a|+|b|>1$　　C.$2^a+2^b>1$　　D.$\frac{4}{a}+\frac{b+1}{b}>10$

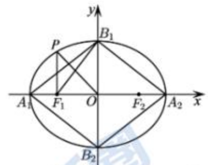
11.如图，已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A_1,A_2$分别为左、右顶点，$B_1,B_2$分别为上、下顶点，$F_1,F_2$分别为左、右焦点，点$P$在椭圆$C$上，则下列条件中能使$C$的离心率为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的是

A.$|OF_1|\cdot|OA_2|=|OB_1|^2$

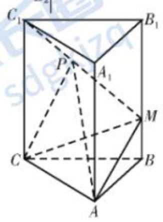
B.$\angle F_1B_1A_2=90°$

C.$PF_1\perp x$轴，且$PO/\!/A_2B_1$

D.四边形$A_1B_1A_2B_2$的内切圆过焦点F_1,F_2



12.如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，底面是边长为2的正三角形，$AA_1=3$，点M在BB_1上，且$BM=\frac{1}{2}MB_1$，P为线段C_1M上的点，则



A.$C_1M\perp$平面AMC

B.当P为C_1M的中点时，直线AP与平面ABC所成角的正切值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C.存在点P，使得$CP\perp AM$

D.存在点P，使得三棱锥$P-AMC$的体积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

齐鲁家长圈 微信号：sdgkjzq

官方微信公众号：sdgkjzq　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：sdgkjzq2021

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

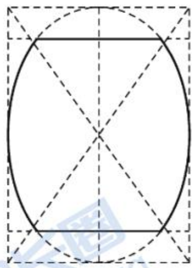
13.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_4 x, x>0,\\ f(x+3), x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(-4)$ 的值为________.

14.已知函数 $f(x)=x+\dfrac{mx}{e^x-1}$ 是偶函数，则 $m=$________.

15.若圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2:(x-a)^2+(y-b)^2=1$ 的公共弦 AB 的长为 1，则直线 $a^2x+2b^2y+3=0$ 恒过定点 M 的坐标为________.

16.祖暅原理："幂势既同，则积不容异". 即：夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等. 如图①是一个椭圆球形瓷凳，其轴截面为图②中的实线图形，两段曲线是椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 的一部分，若瓷凳底面圆的直径为 4，高为 6，则 $a^2=$________；利用祖暅原理可求得该椭圆球形瓷凳的体积为________.（第一空 2 分，第二空 3 分）


图①


图②

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1=1$, $S_{n+1}=2S_n+1$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $b_n=\dfrac{\log_2 a_n}{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

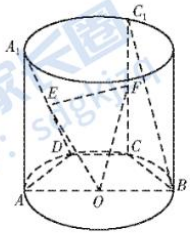
已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{4})(A>0, 0<\omega<1)$，$f(\dfrac{\pi}{4})=f(\dfrac{\pi}{2})$，且 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{3\pi}{4})$ 上的最大值为 $\sqrt{2}$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩小为原来的 $\dfrac{1}{3}$，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(\dfrac{\alpha}{2})=\dfrac{1}{2}$，求 $\sin 2\alpha$ 的值.

官方微信公众号：sdgkjzq　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：sdgkjzq2021

19.（12分）



如图，AB 是圆柱底面圆 O 的直径，AA_1，CC_1 为圆柱的母线，四边形 $ABCD$ 是底面圆 O 的内接等腰梯形，且 $AB=AA_1=2BC=2CD$，E，F 分别为 A_1D，C_1C 的中点.

（1）证明：$EF\parallel$ 平面 $ABCD$；

（2）求平面 OEF 与平面 BCC_1 夹角的余弦值.

20.（12分）

甲、乙两位同学进行摸球游戏，盒中装有6个大小和质地相同的球，其中有4个白球，2个红球.

（1）甲、乙先后不放回地各摸出1个球，求两球颜色相同的概率；

（2）甲、乙两人先后轮流不放回地摸球，每次摸1个球，当摸出第二个红球时游戏结束，或能判断出第二个红球被哪位同学摸到时游戏也结束. 设游戏结束时甲、乙两人摸球的总次数为 X，求 X 的分布列和期望.

21.（12分）

已知函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{2}\sin x$.

（1）若存在 $x\in[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}]$，使 $f(x)\leqslant ax$ 成立，求 a 的取值范围；

（2）若 $g(x)=f(x)-m\ln x$，存在 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且当 $x_1\neq x_2$ 时，$g(x_1)=g(x_2)$，求证：$x_1x_2<4m^2$.

22.（12分）

已知抛物线 $H:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，抛物线 H 上的一点 M 的横坐标为5，O 为坐标原点，$\cos\angle OFM=-\dfrac{2}{3}$.

（1）求抛物线 H 的方程；

（2）若一直线经过抛物线 H 的焦点 F，与抛物线 H 交于 A，B 两点，点 C 为直线 $x=-1$ 上的动点.

①求证：$\angle ACB\leqslant\dfrac{\pi}{2}$；

②是否存在这样的点 C，使得 $\triangle ABC$ 为正三角形？若存在，求点 C 的坐标；若不存在，说明理由.

2022 年普通高等学校招生全国统一考试(模拟)

数学试题参考答案及评分标准

2022.5

说明：

一、本解答只给出了一种解法供参考，如考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容参照评分标准酌情赋分.

二、当考生的解答在某一步出错误时，如果后继部分的解答未改该题的内容与难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确答案应得分数一半；如果后继部分的解答有较严重的错误或又出现错误，就不再给分.

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.C　2.B　3.D　4.C　5.D　6.D　7.A　8.A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.AC　10.BC　11.ABD　12.BD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.$\frac{1}{2}$　14.2　15.$(-1,-\frac{1}{2})$　16.$\frac{81}{5}$　44π

四、解答题：

17.解：(1) $\because S_{n+1}=2S_n+1$.　①

$\therefore$ 当 $n\geq2$ 且 $n\in N^*$ 时，

$\therefore S_n=2S_{n-1}+1$　② ………………………… 1 分

由①-②得：$a_{n+1}=2a_n$ ………………………… 2 分

由 $S_2=2S_1+1$ 得 $a_1+a_2=2a_1+1$ ………………………… 3 分

又 $a_1=1$，$\therefore a_2=2$　　$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=2$， ………………………… 4 分

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是以 1 为首项，2 为公比的等差数列.　　$\therefore a_n=2^{n-1}$ ………………………… 5 分

(2) $\because b_n=\frac{\log_2 a^n}{a^n}=\frac{\log_2 2^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{n-1}{2^{n-1}}$ ………………………… 7 分

$\therefore T_n=\frac{0}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}$　③ ………………………… 8 分

$\frac{1}{2}T_n=\quad\frac{0}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{n-2}{2^{n-1}}+\frac{n-1}{2^n}$ ④

由③-④得：$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n-1}{2^n}=1-\frac{n+1}{2^n}$ ………………………… 9 分

$\therefore T_n=2-\frac{n+1}{2^{n-1}}$. ………………………… 10 分

18.解：(1)因为 $0<\omega<1$，所以周期 $T>2\pi$. ………………………… 1 分

又 $f(x)$ 在 $(0,\frac{3\pi}{4})$ 上的最大值为 $\sqrt{2}$，且 $f(\frac{\pi}{4})=f(\frac{\pi}{2})$

所以当 $x=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})=\frac{3\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\sqrt{2}$，

所以 $A=\sqrt{2}$，且 $f(\frac{3\pi}{8})=\sqrt{2}$. ………………………… 3 分

$\therefore \sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{8}\omega+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，

$\because 0<\omega<1$，$\quad\therefore \frac{3\pi}{8}\omega+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \omega=\frac{2}{3}$， ………………………… 5 分

$\therefore f(x)=\sqrt{2}\sin(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{4})$ ………………………… 6 分

(2) $g(x)=f(3x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$， ………………………… 8 分

$\therefore g(\frac{\alpha}{2})=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$，

$\therefore \sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2\sqrt{2}}$， ………………………… 10 分

$\sin2\alpha=-\cos(2\alpha+\frac{\pi}{2})=2\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{4})-1=-\frac{3}{4}$. ………………………… 12 分

法二：$g(x)=f(3x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$， ………………………… 8 分

$\therefore g(\frac{\alpha}{2})=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2\sqrt{2}}$， ………………………… 10 分

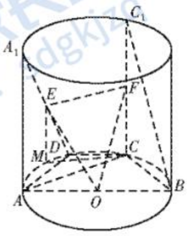
$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$，

$\therefore 1+\sin2\alpha=\frac{1}{4}$，

官方微信公众号：sdgkjzq 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：sdgkjzq2021

$\sin 2\alpha=-\frac{3}{4}$. ………………………………………………………… 12 分

19.(1)(法一)证明：



取 AD 的中点 M，连接 EM,MC，

$\because E$ 为 A_1D 的中点，F 为 CC_1 的中点，

$\therefore EM/\!/AA_1, EM=\frac{1}{2}AA_1$， ………………………………… 1 分

又 $CF/\!/AA_1, CF=\frac{1}{2}AA_1$，

$\therefore EM/\!/CF, EM=CF$，

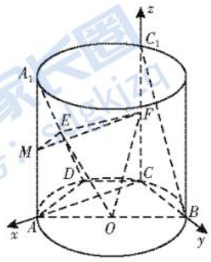
$\therefore$ 四边形 $EMCF$ 为平行四边形. ……………………………………… 2 分

$\therefore EF/\!/CM$. ………………………………………………………… 3 分

又 $EF\not\subset$ 平面 $ABCD$，$CM\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore EF/\!/$ 平面 $ABCD$. ………………………………………………… 4 分

(1)(法二)证明：



取 AA_1 的中点 M，连接 EM,FM,AC，

$\because EM/\!/AD, EM\not\subset$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore EM/\!/$ 平面 $ABCD$. ………………………………… 1 分

$\because F$ 为 CC_1 的中点，$\therefore EM/\!/CF$，

又 $AM/\!/CF$，所以四边形 $ACFM$ 为平行四边形，

$\therefore FM/\!/XC$，又 $FM\not\subset$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore FM/\!/$ 平面 $ABCD$. ………………………………… 2 分

因为 $EM\cap FM=M$，所以平面 $EFM/\!/$ 平面 $ABCD$. ……… 3 分

因为 $EF\subset$ 平面 EFM，

所以 $EF/\!/$ 平面 $ABCD$. ………………………………………………… 4 分

(2)解：设 $AB=AA_1=2BC=2CD=4$，$\because AC\perp BC$，$\therefore AC=2\sqrt{3}$.

由题意知 CA,CB,CC_1 两两垂直，以 C 为坐标原点，分别以 CA_1,CB,CC_1 所在直线为 x，y,z 轴建立空间直角坐标系. ………………………………………… 5 分

则 $A_1(2\sqrt{3},0,4)$，$O(\sqrt{3},1,0)$，$F(0,0,2)$，$C(0,0,0)$，$D(\sqrt{3},-1,0)$，

$\therefore A_1D$ 的中点 E 的坐标为 $(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},2)$ ……………………………… (6 分)

所以 $\overrightarrow{OF}=(-\sqrt{3},-1,2)$，$\overrightarrow{EF}=(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$ ……………………………… (7 分)

设平面 OEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}-\sqrt{3}-y+2z=0\\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}x\ \frac{1}{2}y=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}\sqrt{3}+y-2z=0\\ 3\sqrt{3}-y=0\end{cases}$，

令 $x=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},9,6)$， ………………………………………… 9 分

官方微信公众号：sdgkjzq 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：sdgkjzq2021

$\because AC\perp BC, AC\perp CC_1, BC\cap CC_1=C$,

$\therefore AC\perp$平面 BCC_1,

$\therefore$ 平面 BCC_1 的一个法向量为$\overrightarrow{CA}=(2\sqrt{3},0,0)$ ………………………………… 11 分

$\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{CA}>=\dfrac{\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}{\sqrt{3+81+36}\cdot2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{10}}{20}$,

所以平面 OEF 与平面 BCC_1 夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{20}$. ………………………………… 12 分

20.解:(1)两球均为白球的概率为 $P_1=\dfrac{A_4^2}{A_6^2}=\dfrac{2}{5}$, ………………………………… 2 分

两球均为红球的概率为 $P_2=\dfrac{A_2^2}{A_6^2}=\dfrac{1}{15}$, ………………………………… 4 分

故两球颜色相同的概率 $P=P_1+P_2=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{7}{15}$ ………………………………… 5 分

(2)由题意知 $X=2,3,4,5$, ………………………………… 6 分

$P(X=2)=\dfrac{A_2^2}{A_6^2}=\dfrac{1}{15}$, ………………………………… 7 分

$P(X=3)=\dfrac{C_4^1A_2^1A_2^2}{A_6^3}=\dfrac{4\times2\times2}{6\times5\times4}=\dfrac{2}{15}$, ………………………………… 8 分

$P(X=4)=\dfrac{C_4^2A_3^2A_2^2+A_4^4}{A_6^4}=\dfrac{6\times12+4\times6}{6\times5+4\times3}=\dfrac{16}{5\times4\times3}=\dfrac{4}{15}$, ………………………………… 9 分

$P(X=5)=\dfrac{C_4^3A_4^3A_2^2+C_2^1A_4^1A_4^4}{A_6^5}=\dfrac{4\times4\times3\times2\times2+2\times4\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2}=\dfrac{8}{15}$, ………………………………… 10 分

所以 X 的分布列为

X	2	3	4	5
$P(X)$	$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{8}{15}$

………………… 11 分

$E(X)=2\times\dfrac{1}{15}+3\times\dfrac{2}{15}+4\times\dfrac{4}{15}+5\times\dfrac{8}{15}=\dfrac{64}{15}$. ………………………………… 12 分

21.解:(1)由 $f(x)\leqslant ax$,得 $x-\dfrac{1}{2}\sin x\leqslant ax, x\in[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}]$,

即 $a\geqslant1-\dfrac{\sin x}{2x}$ ………………………………… 1 分

令 $h(x)=1-\dfrac{\sin x}{2x}$,得 $h'(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{2x}$ ………………………………… 2 分

设 $\varphi(x)=\sin x-x\cos x$,则 $\varphi'(x)=x\sin x>0$

$\therefore \varphi(x)$在$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上单调递增，$\therefore \varphi(x)>\varphi(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\frac{\pi}{4})>0$

$\therefore$ 在$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增

$\therefore h(x)_{min}=h(\frac{\pi}{4})=1-\frac{\sqrt{2}}{\pi}$，…………………………………………… 4 分

$\therefore a$ 取值范围是$[1-\frac{\sqrt{2}}{\pi},+\infty)$ …………………………………………… 5 分

(2)不妨设$0<x_1<x_2$，

$\because g(x_1)=g(x_2)$，$\therefore x_1-\frac{1}{2}\sin x_1-m\ln x_1=x_2-\frac{1}{2}\sin x_2-m\ln x_2$，$(*)$

$\therefore m(\ln x_2-\ln x_1)=x_2-x_1-\frac{1}{2}(\sin x_2-\sin x_1)$ …………………………………… 6 分

令$y=x-\sin x$，故$y'=1-\cos x\geqslant 0$，故函数$y=x-\sin x$在$(0,+\infty)$上单调递增.

$\therefore x_2-\sin x_2>x_1-\sin x_1$，从而$x_2-x_1>\sin x_2-\sin x_1$，…………………………………… 7 分

$\therefore$ 由$(*)$得

$m(\ln x_2-\ln x_1)=x_2-x_1-\frac{1}{2}(\sin x_2-\sin x_1)>(x_2-x_1)-\frac{1}{2}(x_2-x_1)=\frac{1}{2}(x_2-x_1)$

$\therefore 2m>\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>0$ …………………………………………… 9 分

下面证明：$\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$，

令$\frac{x_2}{x_1}=t$，则$t>1$.即证明：$\frac{t-1}{\ln t}>\sqrt{t}$，只要证明$\ln t-\frac{t-1}{\sqrt{t}}<0$

设$m(t)=\ln t-\frac{t-1}{\sqrt{t}}(t>1)$，$\therefore m'(t)=\frac{-(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}<0$在$(1,+\infty)$恒成立，

$\therefore m(t)$在$(1,+\infty)$单调递减，故$m(t)<m(1)=0$，$\therefore 2m>\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$

$\therefore x_1x_2<4m^2$. …………………………………………… 12 分

22.解：(1)$\because M$的横坐标为5，

$\therefore |MF|=5+\frac{p}{2}$ …………………………………………… 1 分

过M作$MN\perp x$轴于N点，

$\because \cos\angle OFM=-\frac{2}{3}$，

$\therefore \cos\angle MFN=\frac{2}{3}$，且$|FN|=5-\frac{p}{2}$，…………………………………………… 2 分

官方微信公众号：sdgkjzq 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：sdgkjzq2021

$\therefore \cos\angle MFN=\frac{|FN|}{|FM|}=\frac{5-\frac{p}{2}}{5+\frac{p}{2}}=\frac{2}{3}$, ………………………………………… 3 分

得 $p=2$

$\therefore$ 抛物线 H 的方程为 $y^2=4x$. ………………………………………… 4 分

(2)①设 AB 方程为 $x=my+1$, $C(-1,t)$.

由 $\begin{cases}x=my+1\\ y_2=4x\end{cases}$ 得 $y_2-4my-4=0$,

$\Delta=(4m)^2+16>0$, $y_1+y_2=4m$, $y_1y_2=-4$,

$x_1+x_2=my_1+1+my_2+1=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$,

$x_1x_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}=1$ ………………………………………… 5 分

$\because \overrightarrow{CA}=(x_1+1,y_1-t)$, $\overrightarrow{CB}=(x_2+1,y_2-t)$,

$\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(x_1+1)(x_2+1)+(y_1-t)(y_2-t)$ ………………………………………… 6 分

$=x_1x_2+x_1+x_2+1+y_1y_2-t(y_1+y_2)+t^2$

$=1+4m^2+2+1-4-4tm+t^2$

$=4m^2-4tm+t^2=(2m-t)^2\geqslant 0$

$\therefore \angle ACB\leqslant\frac{\pi}{2}$ ………………………………………… 7 分

②假设存在点 C, 使得 $\triangle ABC$ 为正三角形, 取 AB 中点为 $D(x_0,y_0)$, 连接 CD,

则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2m^2+1$, $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=2m$, 且 $CD\perp AB$,

$\therefore D(2m^2+1,2m)$. ………………………………………… 8 分

当 $m=0$ 时, AB 斜率不存在, 由抛物线对称性知 C 的坐标为 $(-1,0)$

此时 $\triangle ABC$ 不是正三角形. ………………………………………… 9 分

当 $m\neq 0$ 时, $k_{AB}=\frac{1}{m}$, $k_{CD}=\frac{2m-t}{2m^2+2}$

由 $CD\perp AB$, 得 $k_{AB}\cdot k_{CD}=\frac{1}{m}\cdot\frac{2m-t}{2m^2+2}=-1$

解得 $t=2m^3+4m$

$\therefore C(-1,2m^3+4m)$ ………………………………………… 10 分

$\therefore |CD|=\sqrt{(2m^2+2)^2+(2m^3+4m)^2}=2(m^2+1)\sqrt{m^2+1}$,

又 $\because |AB|=x_1+x_2+2=4(m^2+1)$, ………………………………………… 11 分

由 $|CD|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$ 得 $m=\pm\sqrt{2}$,

所以存在点 $C(-1,\pm 8\sqrt{2})$ 使得 $\triangle ABC$ 为正三角形. ………………………………………… 12 分

官方微信公众号：sdgkjzq　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：sdgkjzq2021

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索