

绝密★启用前

试卷类型：A

名校联盟全国优质校 2023 届高三大联考

数学试题参考答案与评分参考

一、单项选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	A	C	B	B	D	A

二、多项选择题：

题号	9	10	11	12
答案	BD	BC	AC	ABD

12. 若一条直线与两条或两条以上的曲线均相切，则称该直线为这些曲线的公切线。已知直

线 $l: y = kx + b$ 为曲线 $C_1: y = e^{ax}$ 和 $C_2: y = \frac{\ln x}{a}$ ($a > 0$) 的公切线，则下列结论正确的为

A. C_1 和 C_2 关于直线 $y = x$ 对称

B. 当 $a = 1$ 时， $ke^{b+1} = 1$

C. 若 $b = 0$ ，则 $a = \frac{1}{2}$

D. 当 $a = 1$ 时， C_1 和 C_2 必存在斜率为 $\frac{1}{k}$ 的公切线

解析：不妨设 l 与 $C_1: y = e^{ax}$ 和 $C_2: y = \frac{\ln x}{a}$ 依次相切于点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

(1) 考查选项 A：已知函数 $y = (e^a)^x$ 和 $y = \log_{e^a} x$ 互为反函数，则 C_1 和 C_2 关于直线 $y = x$ 对称，故选项 A 正确；

(2) 考查选项 B：当 $a = 1$ 时，由 l 与 C_2 相切可知 $\begin{cases} \ln x_2 = kx_2 + b, \\ \frac{1}{x_2} = k, \end{cases} \therefore b = -1 - \ln k$ ，

$\therefore ke^{b+1} = ke^{-\ln k} = k \cdot \frac{1}{k} = 1$ ，故选项 B 正确；

(3) 考查选项 C：若 $b = 0$ ，则 $l: y = kx$ ，不难知道，有 $\begin{cases} e^{ax_1} = kx_1, \\ ae^{ax_1} = k, \end{cases} \text{①}$ ，且 $\begin{cases} \frac{\ln x_2}{a} = kx_2, \\ \frac{1}{ax_2} = k, \end{cases} \text{②}$ ，

由②可得 $\frac{\ln x_2}{a} = kx_2 = \frac{1}{a}$ ，又 $a > 0$ ， $\therefore \ln x_2 = 1$ ，即 $x_2 = e$ ， $\therefore k = \frac{1}{ae}$ ，

由①可得 $akx_1 = k$ ，显然 $k \neq 0$ ， $\therefore ax_1 = 1$ ， $\therefore ae = k$ ，

$\therefore ae = \frac{1}{ae}$ ，即 $a = \frac{1}{e}$ ，故选项 C 错误；

(4) 考查选项 D：由 l 与 C_1 相切可知 $\begin{cases} e^{x_1} = kx_1 + b, \\ e^{x_1} = k, \end{cases} \therefore x_1 = \ln k, \quad b = k - k \ln k,$

由 (2) 可知 $b = -1 - \ln k = k - k \ln k$ ， $\therefore k + 1 + (1 - k) \ln k = 0$ ，

设函数 $g(x) = x + 1 + (1 - x) \ln x$ ，依题可得 $g(k) = 0$ ，

又 $g\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} + 1 + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \ln \frac{1}{k} = \frac{1}{k} + 1 - \ln k + \frac{\ln k}{k} = \frac{k + 1 + (1 - k) \ln k}{k} = 0$ ，

$\therefore C_1$ 和 C_2 亦存在斜率为 $\frac{1}{k}$ 的公切线，故选项 D 正确；

综上所述，应选 ABD.

三、填空题：

13. 2； 14. -10； 15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ； 16. $(\sqrt{2}, +\infty)$.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中， O 为坐标原点，记 F_1 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的

左焦点，以 OF_1 为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 O, A 两点，且线段 AF_1 与 C 交于

点 B ，若 $\overrightarrow{F_1B} = \lambda \overrightarrow{F_1A}$ ($\lambda > \frac{1}{2}$)，则 C 的离心率的取值范围为_____.

解析：易知 $|\overrightarrow{F_1A}| = b$ ， $\therefore \overrightarrow{F_1B} = \lambda \overrightarrow{F_1A}$ ， $\therefore |F_1B| = \lambda b$ ，

记 C 的右焦点为 F_2 ，连接 BF_2 ， $\therefore |F_2B| = 2a + \lambda b$ ，

在 $\triangle F_1BF_2$ 中， $\cos \angle F_2F_1B = \frac{\lambda^2 b^2 + 4c^2 - (2a + \lambda b)^2}{4\lambda bc} = \frac{b - \lambda a}{\lambda c}$ ，

$\because \triangle OF_1A$ 为直角三角形， $\therefore \cos \angle F_2F_1B = \cos \angle OF_1A = \frac{b}{c}$ ， $\therefore \frac{b - \lambda a}{\lambda c} = \frac{b}{c}$ ，化简得 $\lambda = \frac{b}{a + b}$ ，

$\because$ 线段 AF_1 与 C 交于点 B ，且 $\lambda > \frac{1}{2}$ ， $\therefore \frac{1}{2} < \frac{b}{a + b}$ ，即 $a < b$ ， $\therefore a^2 < b^2 = c^2 - a^2$ ，即 $2a^2 < c^2$ ，

$\therefore e^2 > 2$ ， $\therefore e \in (\sqrt{2}, +\infty)$ ，故应填 $(\sqrt{2}, +\infty)$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_1 = 1$ ， $S_n = a_{n+1} - 1$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = na_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

解: (1) $\because a_1 = 1, S_n = a_{n+1} - 1$.

$\therefore S_1 = a_2 - 1$, 解得 $a_2 = 2$1 分

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = a_n - 1$,

$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = a_{n+1} - a_n$,2 分

$\therefore 2a_n = a_{n+1}$, 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$3 分

$\because \frac{a_2}{a_1} = 2$ 也满足上式,4 分

$\therefore \{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列,

$\therefore a_n = 2^{n-1}$5 分

(2) 由 (1) 知 $a_{n+1} = 2^n$, $\therefore b_n = n \cdot 2^n$,

$\therefore T_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \times 2^n$ ①,

则 $2T_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + (n-1) \times 2^n + n \times 2^{n+1}$ ②,6 分

①-②得,

$-T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \times 2^{n+1}$ 7 分

$= \frac{2 \times (1-2^n)}{1-2} - n \times 2^{n+1}$ 8 分

$= (1-n) \times 2^{n+1} - 2$,9 分

$\therefore T_n = 2 + (n-1) \times 2^{n+1}$10 分

18. (12 分)

设 $\triangle ABC$ 的三个角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{\sin A - \sin B}{\sin C} = \frac{a-c}{a+b}$.

(1) 求 B ;

(2) 已知 $b=3$, 且 AC 边上存在点 D , 使得 BD 平分 $\angle ABC$. 当 $BD=2$ 时, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

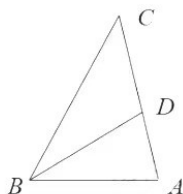
解: (1) $\because \frac{\sin A - \sin B}{\sin C} = \frac{a-c}{a+b}$, 由正弦定理得 $\frac{a-b}{c} = \frac{a-c}{a+b}$,1 分

化简得 $b^2 = a^2 + c^2 - ac$,2 分

∴由余弦定理得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$,3 分

又∵ $B \in (0, \pi)$, ∴ $B = \frac{\pi}{3}$4 分

(2) 如图所示



(第 18 题图)

∵ $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD}$,5 分

即 $\frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} BA \cdot BD \cdot \sin \angle ABD + \frac{1}{2} BC \cdot BD \cdot \sin \angle CBD$,7 分

由 BD 平分 $\angle ABC$, 可化简得 $BA + BC = \frac{\sqrt{3}}{2} BA \cdot BC$ ①,8 分

又由余弦定理得 $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \times \cos B$ ②,10 分

联立①, ②, 解得 $BA \cdot BC = 6$,11 分

∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{3\sqrt{3}}{2}$12 分

19. (12 分)

某校筹办运动会, 设计了方案一、方案二两种方案. 为了解对这两种方案的支持情况, 在校内随机抽取 100 名同学, 得到数据如下:

	男		女	
	支持	不支持	支持	不支持
方案一	20 人	40 人	30 人	10 人
方案二	35 人	25 人	25 人	15 人

假设校内所有同学支持何种方案互不影响.

(1) 依据所给数据及小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验, 能否认为支持方案一与性别有关?

(2) 以抽取的 100 名同学的支持率高低为决策依据, 应选择哪种方案?

(3)用频率估计概率,从全校支持方案一的学生中随机抽取3人,其中男生的人数记为 X ,求随机变量 X 的分布列和数学期望.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
χ_{α}^2	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

解: (1)易得如下列联表:

性别	方案一		合计
	支持	不支持	
男	20	40	60
女	30	10	40
合计	50	50	100

.....1分

零假设为 H_0 : 支持方案一与运动员的性别无关.

根据列联表中的数据,经计算得到

$$\chi^2 = \frac{100 \times (20 \times 10 - 30 \times 40)^2}{50 \times 50 \times 40 \times 60} = \frac{50}{3} \approx 16.667 > 10.828 = \chi_{0.001}^2, \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验,可以推断 H_0 不成立,即认为支持方案一与运动员的性别有关,此推断犯错误的概率不大于0.001.4分

(2)由题设表格中的数据可知,

$$\text{支持方案一的频率为 } \frac{20+30}{20+40+30+10} = \frac{1}{2},$$

$$\text{支持方案二的频率为 } \frac{35+25}{35+25+25+15} = \frac{3}{5},$$

$$\because \frac{1}{2} < \frac{3}{5}, \therefore \text{本次运动会应选择方案二.} \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$(3) \text{男生支持方案一的概率为 } \frac{20}{20+30} = \frac{2}{5}, \text{女生支持方案一的概率为 } \frac{30}{20+30} = \frac{3}{5},$$

$$\text{则 } X \sim B(3, \frac{2}{5}), X \text{ 的可能取值为 } 0, 1, 2, 3, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$P(X=0) = C_3^0 (\frac{3}{5})^3 = \frac{27}{125}, P(X=1) = C_3^1 \times \frac{2}{5} \times (\frac{3}{5})^2 = \frac{54}{125}, P(X=2) = C_3^2 \times (\frac{2}{5})^2 \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125},$$

$$P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

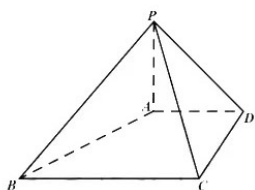
$$\therefore E(X) = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. (12 分)

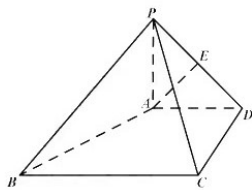
在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧棱 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且平面 $PAD \perp$ 平面 PCD .

(1) 证明: $AD \perp CD$;

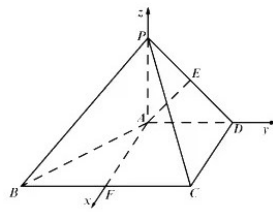
(2) 若 $AD \parallel BC$, 且 $BC = 2AP = 2AD = 2$, 记平面 BPC 与平面 PCD 的夹角为 θ , 当 $\cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{5}$ 时, 求 CD 的长度.



(第 20 题图)



(图 1)



(图 2)

解: (1) 证明: 如图 1, 过 A 作 $AE \perp PD$, 且垂足为 E ,

$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 PCD , 平面 $PAD \cap$ 平面 $PCD = PD$,

$\therefore AE \perp$ 平面 PCD , $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

又 $CD \subset$ 平面 PCD , $\therefore AE \perp CD$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $CD \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA \perp CD$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

又 $PA \cap AE = A$, $PA, AE \subset$ 平面 PAD ,

$\therefore CD \perp$ 平面 PAD , $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

又 $AD \subset$ 平面 PAD , $\therefore AD \perp CD$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 设 BC 的中点为 F , 连接 AF ,

$\because AD \parallel BC$, $AD = \frac{1}{2}BC = FC$, $AD \perp CD$,

$\therefore$ 四边形 $AFCD$ 为平行四边形,

又 $\because AD \perp CD$, $\therefore AD \perp AF$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

设 $CD = t (t > 0)$ ，以 A 为原点， AF ， AD ， AP 所在的直线分别为 x ， y ， z 轴，建立如

图 2 所示的空间直角坐标系，则 $P(0,0,1)$ ， $D(0,1,0)$ ， $C(t,1,0)$ ， $B(t,-1,0)$ ， $E(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ，

$$\overrightarrow{PC} = (t,1,-1)，\overrightarrow{BC} = (0,2,0)，\overrightarrow{AE} = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})，\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

由(1)知 $AE \perp$ 平面 PCD ， $\therefore$ 平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n} = (0,1,1)$ ， $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

设 $\vec{m} = (x,y,z)$ 为平面 PBC 的一个法向量，则

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} tx + y - z = 0, \\ 2y = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} z = tx, \\ y = 0, \end{cases} \text{ 令 } x = 1, \text{ 得 } \vec{m} = (1,0,t), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{t}{\sqrt{2} \times \sqrt{t^2 + 1}}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{平面 } BPC \text{ 与平面 } PCD \text{ 夹角的余弦值为 } \frac{\sqrt{10}}{5}, \therefore \left| \frac{t}{\sqrt{2} \times \sqrt{t^2 + 1}} \right| = \frac{\sqrt{10}}{5}, \text{ 解得 } t = 2,$$

$$\therefore CD = 2. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中， O 是坐标原点，点 A, B 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上、下顶点，直线 $l: x = 2$ 与 C 有且仅有一个公共点，设点 D 在 C 上运动，且 D 不在坐标轴上，当直线 BD 的斜率为 $\sqrt{3}$ 时， C 的右焦点恰在直线 BD 上.

(1) 求 C 的方程；

(2) 设直线 BD 交 x 轴于点 P ，直线 AD 交 l 于点 Q ，直线 PQ 交 C 于 M, N 两点.

(i) 证明：直线 PQ 的斜率为定值；

(ii) 求 $\triangle OMN$ 面积的取值范围.

解：(1) $\because l$ 与 C 有且只有 1 个公共点， $\therefore a = 2$ ， $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

记 C 的右焦点为 $F(c,0)$ ，由题可知当直线 BD 的斜率为 $\sqrt{3}$ 时， F 恰在直线 BD 上，

$$\therefore \angle OFB = 60^\circ, \therefore \tan \angle OFB = \frac{b}{c} = \sqrt{3}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \because b^2 + c^2 = a^2 = 4, \therefore b = \sqrt{3}, c = 1,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2) (i) 设 $D(x_0, y_0)$ ，显然 $x_0 \neq 0$ ，且直线 AD, BD 的斜率存在，不妨依次设为 k_1, k_2 ，

$$\therefore k_1 = \frac{y_0 - \sqrt{3}}{x_0}, k_2 = \frac{y_0 + \sqrt{3}}{x_0}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

∴ 直线 AD , BD 的方程分别为 $y = \frac{y_0 - \sqrt{3}}{x_0}x + \sqrt{3}$, $y = \frac{y_0 + \sqrt{3}}{x_0}x - \sqrt{3}$,

∵ 直线 AD 交 $l: x = 2$ 于点 Q , 且直线 BD 交 x 轴于点 P ,

∴ $Q(2, \frac{2y_0 + \sqrt{3}x_0 - 2\sqrt{3}}{x_0})$, $P(-\frac{\sqrt{3}x_0}{y_0 + \sqrt{3}}, 0)$, 5 分

易知 $\frac{\sqrt{3}x_0}{y_0 + \sqrt{3}} \neq 2$, 否则 $P(2, 0)$ 在椭圆 C 上, 即点 D 与 P 重合, 这与 D 不在坐标轴上矛盾,

∴ 直线 PQ 的斜率存在, 不妨设其为 k_3 ,

∴ $k_3 = \frac{\frac{2y_0 + \sqrt{3}x_0 - 2\sqrt{3}}{x_0}}{2 - \frac{\sqrt{3}x_0}{y_0 + \sqrt{3}}} = \frac{2y_0^2 + \sqrt{3}x_0y_0 + 3x_0 - 6}{-\sqrt{3}x_0^2 + 2x_0y_0 + 2\sqrt{3}x_0}$, 6 分

∵ $D(x_0, y_0)$ 在 C 上, ∴ $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$, 即 $y_0^2 = 3 - \frac{3x_0^2}{4}$, 代入上式得,

$k_3 = \frac{-\frac{3}{2}x_0^2 + \sqrt{3}x_0y_0 + 3x_0}{-\sqrt{3}x_0^2 + 2x_0y_0 + 2\sqrt{3}x_0} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

∴ 直线 PQ 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即直线 PQ 的斜率为定值. 8 分

(ii) 不妨设直线 PQ 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + m$,

联立 $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得, $6x^2 + 4\sqrt{3}mx + 4m^2 - 12 = 0$, 9 分

由 $\Delta = 48(6 - m^2) > 0$ 得, $-\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$,

显然 O 不在直线 MN 上 (否则不存在 $\triangle OMN$), 即 O 不在直线 PQ 上, ∴ $m \neq 0$,

不难知道 $m \neq \pm\sqrt{3}$, 否则将与 D 不在坐标轴上矛盾,

综上所述, $-\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$, 且 $m \neq \pm\sqrt{3}$, $m \neq 0$, 10 分

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 易知 $x_1 + x_2 = -\frac{2\sqrt{3}m}{3}$, 且 $x_1x_2 = \frac{2m^2 - 6}{3}$,

∴ $|MN| = \sqrt{1 + \frac{3}{4}} |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2} = \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{6 - m^2}}{3}$,

设 O 到直线 MN 的距离为 d , 即 O 到直线 PQ 的距离为 d , 易知 $d = \frac{2|m|}{\sqrt{7}}$,

记 $\triangle OMN$ 的面积为 S ,

$$\therefore S = \frac{1}{2} |MN| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{6-m^2}}{3} \cdot \frac{2|m|}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{-m^4+6m^2}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\because -\sqrt{6} < m < \sqrt{6}, \text{ 且 } m \neq \pm\sqrt{3}, m \neq 0, \therefore m^2 \in (0,3) \cup (3,6),$$

$$\therefore -m^4+6m^2 = -(m^2-3)^2+9 \in (0,9), \therefore S = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{-m^4+6m^2} \in (0, \sqrt{3}),$$

$$\therefore \triangle OMN \text{ 面积的取值范围为 } (0, \sqrt{3}). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^a \ln x - ax + 2a$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 判断 $f(x)$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 恰有两个不同的零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $x_1 + 3x_2 > a + \frac{4}{a} + 4$.

解: (1) 易知 $f'(x) = \frac{e^a}{x} - a = \frac{e^a - ax}{x}$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$ 恒成立, $\therefore f(x)$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递增, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

若 $a > 0$, 当 $x \in (0, \frac{e^a}{a})$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在区间 $(0, \frac{e^a}{a})$ 上单调递增,

当 $x \in (\frac{e^a}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在区间 $(\frac{e^a}{a}, +\infty)$ 上单调递减, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

下面判断 $\frac{e^a}{a}$ 与 e 的大小关系,

令函数 $g(a) = \frac{e^a}{a}$ ($a > 0$), 则 $g'(a) = \frac{e^a(a-1)}{a^2}$ ($a > 0$),

$\therefore$ 当 $a \in (0, 1)$ 时, $g'(a) < 0$, $\therefore g(a)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减,

当 $a \in (1, +\infty)$ 时, $g'(a) > 0$, $\therefore g(a)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore g(a) = \frac{e^a}{a} \geq g(a)_{\min} = g(1) = e,$$

$$\therefore \frac{e^a}{a} \geq e, \text{ 即 } e^{a-1} \geq a \text{ (*)}, \text{ 等号当且仅当 } a=1 \text{ 时取得}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$\therefore$ 当 $a > 0$, 且 $a \neq 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $(e, \frac{e^a}{a})$ 上单调递增, 在区间 $(\frac{e^a}{a}, +\infty)$ 上单调递减; 当 $a=1$ 时, $f(x)$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

综上所述, 若 $a \leq 0$, 则 $f(x)$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递增; 若 $a=1$, 则 $f(x)$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递减; 若 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, 则 $f(x)$ 在区间 $(e, \frac{e^a}{a})$ 上单调递增, 在区间 $(\frac{e^a}{a}, +\infty)$ 上单调递减, $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2)由(1)可知若 $f(x)$ 有两个不同的零点, 则 $a > 0$, 且极大值 $f(\frac{e^a}{a}) > 0$,

$$\text{易知 } f(\frac{e^a}{a}) = e^a \ln(\frac{e^a}{a}) - e^a + 2a = e^a [\ln(\frac{e^a}{a}) - 1] + 2a,$$

由不等式 (*) 可知 $\frac{e^a}{a} > e$, $\therefore e^a [\ln(\frac{e^a}{a}) - 1] > 0$,

$\therefore$ 当 $a > 0$ 时, $f(\frac{e^a}{a}) > 0$ 恒成立,6 分

显然有 $e^a \ln x_1 - ax_1 + 2a = 0$, 且 $e^a \ln x_2 - ax_2 + 2a = 0$,

$$\text{两式相减可得 } \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \frac{e^a}{a}, \text{7 分}$$

不妨设 $t = \frac{x_2}{x_1}$, 则 $t > 1$, 且 $x_2 = tx_1$,

$$\therefore \frac{(t-1)x_1}{\ln t} = \frac{e^a}{a}, \text{ 即 } x_1 = \frac{e^a}{a} \cdot \frac{\ln t}{t-1}, \therefore x_2 = \frac{e^a}{a} \cdot \frac{t \ln t}{t-1},$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{e^a}{a} \left(\frac{\ln t}{t-1} + \frac{t \ln t}{t-1} \right) = \frac{e^a}{a} \cdot \frac{(t+1) \ln t}{t-1}, \text{8 分}$$

(方法一) 由不等式 (*) 可知 $x - 1 \geq \ln x$, $\therefore \frac{1}{t} - 1 \geq \ln \frac{1}{t}$,9 分

$$\text{又 } 2 > \frac{1}{t} + 1 > 0, \therefore \left(\frac{1}{t} - 1 \right) \cdot \frac{2}{\frac{1}{t} + 1} > \frac{1}{t} - 1 \geq \ln \frac{1}{t},$$

$$\therefore 2 \cdot \frac{\frac{1}{t} - 1}{\frac{1}{t} + 1} > \ln \frac{1}{t}, \text{ 即 } 2 \cdot \frac{1-t}{1+t} > -\ln t, \text{ 亦即 } 2 \cdot \frac{t-1}{1+t} < \ln t, \therefore \frac{(t+1) \ln t}{t-1} > 2,$$

$$\therefore x_1 + x_2 > \frac{2e^a}{a}, \text{10 分}$$

由 $x_1 < x_2$ 可知 $x_2 \in (\frac{e^a}{a}, +\infty)$, 欲证 $x_1 + 3x_2 > a + \frac{4}{a} + 4$, 只需证 $\frac{2e^a}{a} + 2x_2 > a + \frac{4}{a} + 4$,

$$\text{只需证 } \frac{4e^a}{a} \geq a + \frac{4}{a} + 4, \text{ 即证 } 4e^a \geq a^2 + 4a + 4, \text{11 分}$$

即证 $2e^{\frac{a}{2}} \geq a + 2$, 亦即证 $e^{\frac{a}{2}} \geq \frac{a}{2} + 1$, 这由不等式 (*) 可知显然成立,

$$\therefore x_1 + 3x_2 > a + \frac{4}{a} + 4 \text{ 得证.12 分}$$

(方法二) 设 $h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$, $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$,

$$\therefore h(t) \geq h(1) = 0, \text{ 即 } \frac{(t+1) \ln t}{t-1} > 2, \text{8 分}$$

$$\therefore x_1 + x_2 > \frac{2e^a}{a}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

由 $x_1 < x_2$ 可知 $x_2 \in (\frac{e^a}{a}, +\infty)$, 欲证 $x_1 + 3x_2 > a + \frac{4}{a} + 4$, 只需证 $\frac{2e^a}{a} + 2x_2 > a + \frac{4}{a} + 4$,

只需证 $\frac{4e^a}{a} \geq a + \frac{4}{a} + 4$, 即证 $4e^a \geq a^2 + 4a + 4$, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

即证 $2e^{\frac{a}{2}} \geq a + 2$, 亦即证 $e^{\frac{a}{2}} \geq \frac{a}{2} + 1$, 这由不等式 (*) 可知显然成立,

$\therefore x_1 + 3x_2 > a + \frac{4}{a} + 4$ 得证. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线