参考答案

一 1.C 2.C 3.B 4.B 5.C 6.D 7.A 8.A

二．9.AB 10.AD. 11.ABD 12.ABD

三． 13. $\frac{\pi}{9}$ 14. 0.76 15. $[\frac{21}{2},12]$ 16. $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

四、解答

17. 【解答】（1）因为 $\cos^2A-\cos^2B-\cos^2C=-1+\sin B\sin C$ 所以 $-\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=\sin B\sin C$，

由正弦定理可得 $-a^2+b^2+c^2=bc$，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，因为 $A\in(0,\pi)$，

则 $A=\frac{\pi}{3}$. ··········5 分

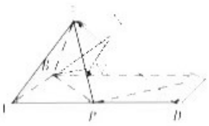
（2）由题意 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

则 $\overrightarrow{AM}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{4}(b^2+c^2+bc)=\frac{1}{4}[(b+c)^2-bc]\geqslant\frac{1}{4}[(b+c)^2-(\frac{b+c}{2})^2]=\frac{27}{4}$，

则 $|\overrightarrow{AM}|\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$，即 ΔABC 的中线 AM 的最小值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$．当且仅当 $b=c=3$ 取最小值

··········10 分

18.（12 分）解：(1)因为 $\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，且 $AP=AB=1$，故 $BP=1$，在 ΔPDC 中，



$PD=DC=1,\angle PDC=\frac{2\pi}{3}$，所以 $PC=\sqrt{3}$，在 ΔBPC 中，$BP=1,PC=\sqrt{3},BC=2$ 所以 $BP\perp PC$，又因为 $BE\perp PC,BP\cap BE=E,BE,BP\subset$ 平面 BPE，所以 $PC\perp$ 平面 BPE ··········4 分

(2) 选①

取 BP 中点为 O，因为 $BE=PE$，故 $EO\perp BP$，由（1）得 $EO\perp PC,BP\cap PC=P$，所以 $EO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\angle EAO$ 为 AE 与平面 $ABCD$ 所成的角，即 $\angle EAO=\frac{\pi}{4}$，ΔABP 为等边三角形，边长为 1，所以 $EO=AO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，ΔEBP 为等边三角形 ··········6 分

（解法 1） 取 PE 中点 M，过 M 作 $MN\perp EC$ 于 N，连接 NB,BM

因 ΔEBP 等边，所以 $BM\perp EP$，由(1)知 $BM\perp PC$ $EP\cap PC=P$，所以 $BM\perp$ 平面 EPC

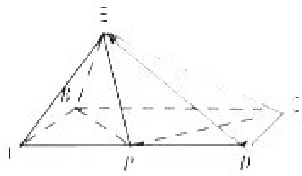
由 $MN\perp EC$，故 $BN\perp EC$，$\angle BNM$ 是二面角 $P-EC-B$ 的平面角， ··········8 分

在直角 ΔEPC 中，$EP=1, PC=\sqrt{3}$，点 M 是 EP 的中点，所以 $MN=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，在直角 ΔBMN

中 $\tan\angle BNM=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=2$， ··········10 分

所以余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ··········12 分

解法 2：以 O 为原点，$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OE}$ 为在 x,y,z 轴正方向建立空间直角坐标系得



$P(0,\frac{1}{2},0), B(0,-\frac{1}{2},0), C(-\sqrt{3},\frac{1}{2},0), E(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$ ，

$\overrightarrow{EP}=(0,\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{PC}=(-\sqrt{3},0,0), \overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$

设 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 EPC 的法向量，则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{EP}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$，$\begin{cases}\frac{1}{2}y_1-\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\\ -\sqrt{3}x_1=0\end{cases}$，

取 $\overrightarrow{n_1}=(0,\sqrt{3},1)$ ··········8 分

设 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 EBC 的法向量，$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BE}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，$\begin{cases}\frac{1}{2}y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=0\\ -\sqrt{3}x_2+y_2=0\end{cases}$，

取 $\overrightarrow{n_2}=(,\sqrt{3},-1)$

··········9 分

设 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$， ··········11 分

二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ··········12 分

选②取 BP 中点为 O，由(1)得 $EO\perp$ 平面 $ABCD$，设 D 到平面 EPC 的距离为 $h, h=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

由已知得 ΔABC 等边三角形，$BP=1$，设 $EO=x$ ，则 $EP=\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}$

因为 $V_{E-PDC}=V_{D-EPC}$，即 $\frac{1}{3}\times S_{\Delta PDC}\times EO=\frac{1}{3}\times S_{\Delta EPC}\times h$，

即$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times PD\times DC\times\sin 120^0\times EO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times EP\times PC\times h$，可求得$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

可求得$EO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………6 分

以解法下同①的解法

19. 解：（1）当$n=1$时，$a_1=S_1=\frac{1}{2}$，

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2+n}$

经检验，　$n=1$时，$a_1=\frac{1}{2}$也符合上式，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{n^2+n}$　　　　　　　　　　　……………3 分

（2）易知$b_n>0$，两边取倒数得：$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{b_n+2}{b_n}$，整理得：$\frac{1}{b_{n+1}}+1=2\left(\frac{1}{b_n}+1\right)$，

$\therefore\left\{\frac{1}{b_n}+1\right\}$是以首项为$\frac{1}{b_1}+1=2$，公比为 2 的等比数列，

$\therefore\frac{1}{b_n}+1=2\times 2^{n-1}$，$\therefore b_n=\frac{1}{2^n-1}$　　　　　　　　　　　…………6 分

（3）由（1）（2）问可知欲比较$b_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}-1}$与$a_n=\frac{1}{n^2+n}$的大小，

即比较$2^{n+1}-1$与n^2+n的大小

当$n=1$时，$2^{1+1}-1=3$，$1^2+1=2$，有 3>2；

当$n=2$时，$2^{2+1}-1=7$，$2^2+2=6$，有 7>6；

当$n=3$时，$2^{3+1}-1=15$，$3^2+3=12$，有 15>12；

猜想$2^{n+1}-1>n^2+n$，下面证明　　　　　　　　　　　　　　　…………8 分

方法一. 当$n\geq 4$时

$$2^{n+1}-1=(1+1)^{n+1}-1=C_{n+1}^0+C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\cdots+C_{n+1}^{n-1}+C_{n+1}^n+C_{n+1}^{n+1}-1\geq 2C_{n+1}^0+2C_{n+1}^1+2C_{n+1}^2-1$$
$$=2+2(n+1)+(n+1)n-1>n^2+n$$

所以对于任意的$n\in N_+$都成立，进而$b_{n+1}<a_n$.　　　　　　　　……………12 分

方法二. 令$f(x)=2^{x+1}-1-x^2-x$，则

$f'(x)=2^{x+1}\ln 2-2x-1, f''(x)=2^{x+1}(\ln 2)^2-2\geq 2^{x+1}(\ln\sqrt{e})^2-2=2^{x-1}-2$ 当$x\in[4,+\infty)$时，

$f''(x)=2^{x-1}-2>0$，$f'(x)$在$x\in[4,+\infty)$单调增，

$f'(x)\geq f'(4)=2^{x+1}\ln 2-2x-1>2^5\times\frac{1}{2}-2\times 4-1=7>0, f(x)$在$x\in[4,+\infty)$单调增，

$f(x)\geq f(4)>2^{4+1}-1-4^2-4=11>0$，所以$2^{x+1}-1-x^2-x>0$，即$2^{x+1}-1>x^2+x$

所以对于任意的$n\in N_+$都成立，进而$b_{n+1}<a_n$.　　　　　　　　……………12 分

方法三

3

下面用数学归纳法证明①当$n = 1$时，显然成立

当$n = 2$时，显然成立

②假设$n = k$时（$k \geq 2$），猜想成立，即$2^{k+1} - 1 > k^2 + k$成立，

那么当$n = k + 1$时，$2^{k+2} - 1 = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot (2^{k+1} - 1) + 1$

$> 2 \cdot (k^2 + k) + 1 = 2k^2 + 2k + 1$

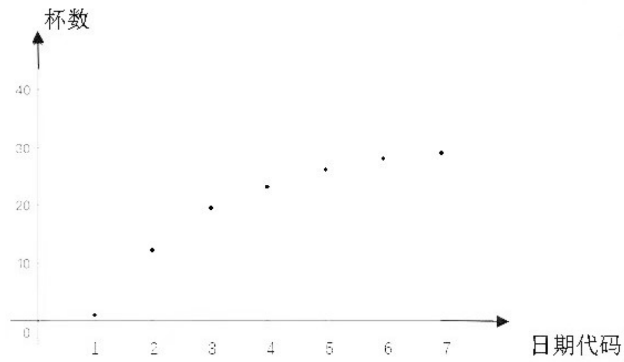
因为$(2k^2 + 2k + 1) - [(k+1)^2 + (k+1)] = k^2 - k - 1$

对任意的$k \geq 2$且$k \in N_+$上式都大于0，

所以有$2^{k+2} - 1 > (k+1)^2 + (k+1)$

综上所述，$2^{n+1} - 1 > n^2 + n$对于任意的$n \in N_+$都成立，进而$b_{n+1} < a_n$. ……………12 分

20 解：(1)



……………………2 分

根据散点图，知 $y = c + d\ln x$ 更适宜作为 y 关于 x 的回归方程模型．…………………3 分

(2) 令 $v = \ln x$，则 $y = c + dv$.

由已知数据得 $\hat{d} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} x_1 y_1 - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - n\overline{x}^2} = \dfrac{235.1 - 7 \times 22.7 \times 1.2}{13.2 - 7 \times 1.2 \times 1.2} \approx 14.2$

$\hat{c} = \overline{y} - \hat{d}\ \overline{v} = 22.7 - 14.2 \times 1.2 \approx 5.7$,

所以 $\hat{y} = 5.7 + 14.2v$.

故 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y} = 5.7 + 14.2\ln x$.　　　　…………………6 分

（此问计算过程中若算得 $\hat{d}$ 是 14.22，算得 $\hat{c}$ 是 5.6，回归方程为 $\hat{y} = 5.6 + 14.2\ln x$ 也算对）

进而由题意知，令 5.7+14.21n x>35，整理得 ln x>2.1，即 $x>e^{2.1}\approx 8.2$，

故当 x=9 时，即到第 9 天才能超过 35 杯．…………………………7 分

(3) 由题意知，这 7 天中销售超过 25 杯的有 4 天，则随机变量 X 的可能取值为 0，1，2，3

$P(X=0)=\frac{C_4^0C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$　$P(X=1)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$　$P(X=3)=\frac{C_4^3C_3^0}{C_7^3}=\frac{4}{35}$

则随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

……………12 分

21.解（1）由题意，$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，设 $D(x_0,y_0)(x_0\neq\pm a)$，

则 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，所以 $y_0^2=\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)$①，

因为直线 DA_1、DA_2 的斜率之积为 3，所以 $\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=3$，

将式①代入化简得：$\frac{b^2}{a^2}=3$②，……………2 分

又双曲线 C 的右焦点为 $F(2,0)$，所以 $a^2+b^2=4$，结合式②解得：$a=1$，$b=\sqrt{3}$，

双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$．……………4 分

(2) 因为 A,B,Q,P 四点共圆，所以 $\angle TPA=\angle TBQ,\Delta TAP\backsim\Delta TQB$，且 $\frac{TA}{TP}=\frac{TQ}{TB}$，所以有

$|TA||TB|=|TP||TQ|$．……………5 分

设直线 AB 的方程为 $y=k_1(x-m)+n$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，设 $m<1<x_1<x_2$，

将直线 AB 方程代入 C 的方程化简并整理可得，

$(3-k_1^2)x^2+(2k_1^2m-2k_1n)x-n^2+2kmn-k_1^2m^2-3=0$，

由已知得 $3-k_1^2\neq 0$，且 $\Delta>0$

由韦达定理有，$x_1+x_2=\frac{-2k_1^2m+2k_1n}{3-k_1^2}$，$x_1x_2=\frac{-n^2+2k_1mn-k_1^2m^2-3}{3-k_1^2}$，……………7 分

又由 $A(x_1,k_1x_1-k_1m+n),T(m,n)$ 可得 $|AT|=\sqrt{1+k_1^2}(x_1-m)$，

同理可得 $|BT|=\sqrt{1+k_1^2}(x_2-m)$，得

$|AT||BT|=(1+k_1^2)(x_1-m)(x_2-m)=(1+k_1^2)(x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2)=(1+k_1^2)\frac{3m^2-n^2-3}{3-k_1^2}$，

设直线 PQ 的方程为 $y=k_2(x-m)+n, P(x_3,y_3), Q(x_4,y_4)$，设 $m<1<x_3<x_4$，

同理可得 $|PT||QT|=\dfrac{(1+k_2^2)(3m^2-n^2-3)}{3-k_2^2}$，……………10 分

由已知得 $3m^2-n^2-3\neq0$，又 $|AT||BT|=|PT||QT|$，则 $\dfrac{1+k_1^2}{3-k_1^2}=\dfrac{1+k_2^2}{3-k_2^2}$，化简可得 $k_1^2=k_2^2$，

又 $k_1\neq k_2$，则 $k_1=-k_2$，即 $k_1+k_2=0$，即直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和为 0.

…12 分

22.（1）证明：由题意，$f(x)=2lnx+x^2+x$，定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{2}{x}+2x+1>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数……………………1 分

易知 $f(1)=2$，故 $f(x_1)+f(x_2)=4=2f(1)$，

若 x_1,x_2 都大于 1，则 $f(x_1)+f(x_2)>2f(1)=4$，不合题意，

同理 x_1,x_2 都小于 1 时也不满足

设 $0<x_1\leq1\leq x_2$，欲证 $x_1+x_2\geq2$，即证 $x_2\geq2-x_1$

即证 $f(x_2)\geq f(2-x_1)$，即证 $4-f(x_1)\geq f(2-x_1)$，

即证 $4\geq f(2-x_1)+f(x_1)$，…………………………………3 分

构造函数 $F(x)=f(2-x)+f(x)$，$x\epsilon(0，1]$

$$F'(x)=f'(2-x)+f'(x)=\frac{2}{x}+2x+1-[\frac{2}{2-x}+2(2-x)+1]$$
$$=\frac{2}{x}+\frac{2}{x-2}+4x-4=\frac{4x-4}{x(x-2)}+4(x-1)=4(x-1)\left[\frac{1}{x(x-2)}+1\right]$$
$$=4(x-1)\frac{x^2-2x+1}{x(x-2)}=\frac{4(x-1)^2}{x(x-2)}>0$$

所以 $F(x)$ 在区间 $(0，1]$ 上单调递增，所以 $F(x)\leq F(1)=2f(1)=4$，进而原不等式得证.

…………………………6 分

（2）由 $g(x)=e^{x-1}+\frac{1}{2}xf(x)$，令 $x=1$，则 $g(1)=1+\frac{1}{2}b\geq0$，故 $b\geq-2$…………7 分

下面证明：$b\geq-2$ 时符合题意，

当 $b\geq-2$ 时，$g(x)=e^{x-1}+x\ln x+\frac{1}{2}bx^2\geq e^{x-1}+x\ln x-x^2$，……………8 分

以下证明：$e^{x-1}+x\ln x-x^2\geq0$，

构造函数 $G(x)=\frac{e^{x-1}}{x}+\ln x-x$，

则 $G'(x)=\frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{e^{x-1}(x-1)+x-x^2}{x^2}=\frac{(x-1)(e^{x-1}-x)}{x^2}$.

令 $H(x)=e^{x-1}-x$，则 $H'(x)=e^{x-1}-1$，

令 $H'(x)>0$，可得 $x>1$；令 $H'(x)<0$，可得 $0<x<1$，

于是 $H(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，于是 $H(x)\geq H(1)=0$，……………10 分

可得当 $0<x<1$ 时，$G'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$G'(x)>0$，

所以$G(x)$在$(0,1)$上递减，在$(1,+\infty)$上递增，故$G(x)\geq G(1)=0$，

综上可知，实数b的取值范围$[-2,+\infty)$. ……………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。