

理科数学



扫码关注 立即做题

审订单位：华中师范大学考试研究院

本试题卷共 4 页，共 22 题。满分 150 分，考试用时 120 分钟

注意事项：

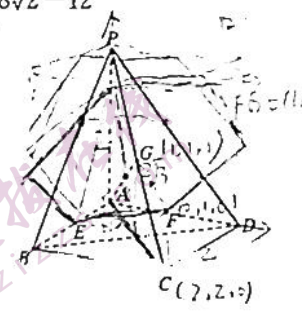
1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在 $(x+i)^6$ (其中 i 为虚数单位) 的展开式中， x^4 项的系数为
A. -1 B. 1 C. -70 D. 70
2. 设 $U=\mathbf{R}$ ，已知两个非空集合 M, N 满足 $M \cap (\complement_U N) = \emptyset$ ，则
A. $M \cap N = \mathbf{R}$ B. $M \subseteq N$ C. $N \subseteq M$ D. $M \cup N = \mathbf{R}$
3. 已知命题 $q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x - 1 > 0$ ，则
A. 命题 $\neg q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x - 1 \leq 0$ 为假命题 B. 命题 $\neg q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x - 1 \leq 0$ 为真命题
C. 命题 $\neg q: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x - 1 \leq 0$ 为假命题 D. 命题 $\neg q: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x - 1 \leq 0$ 为真命题
4. 已知实数 $a, b, c \in (0, 1)$ ， e 为自然对数的底数，且 $ae^2 = 2e^a$ ， $be^3 = 3e^b$ ， $2c = e^c \ln 2$ ，则
A. $b < a < c$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$
5. A, B, C, D, E, F 这 6 位同学站成一排照相，要求 A 与 C 相邻且 A 排在 C 的左边， B 与 D 不相邻且均不排在最右边，则这 6 位同学站队的不同排法数为
A. 72 B. 48 C. 36 D. 24
6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 ，过 F_2 的直线 l 交双曲线 C 于 P, Q 两点且使得 $\overrightarrow{PF_2} = \lambda \overrightarrow{F_2Q} (0 < \lambda < 1)$ ， A 为左支上一点且满足 $\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_2P} = \mathbf{0}$ ， $\overrightarrow{F_1F_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AF_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$ ， $\triangle AF_2P$ 的面积为 b^2 ，则双曲线 C 的离心率为
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$
7. 下列说法正确的是
A. 随机变量 X 服从两点分布，若 $P(X=0) = \frac{1}{3}$ ，则 $E(X) = \frac{1}{3}$

数学试题(全国卷理科数学) 第 1 页(共 4 页)

版权声明：本试题卷为华中师范大学出版社正式出版物，版权所有，盗版必究。

- B. 随机变量 $X \sim B(n, p)$, 若 $E(X) = 30, D(X) = 10$, 则 $p = \frac{1}{3}$
- C. 随机变量 X 服从正态分布 $N(4, 1)$, 且 $P(X \geq 5) = 0.1587$, 则 $P(3 < X < 5) = 0.8413$
- D. 随机变量 X 服从正态分布 $N(3, 4)$, 且满足 $X + 2Y = 3$, 则随机变量 Y 服从正态分布 $N(0, 1)$
8. 设函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{3}), \omega > 0$, 下列说法错误的是
- A. 当 $\omega = 2$ 时, $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称
- B. 当 $\omega = \pi$ 时, $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{4}{3}, 0)$ 成中心对称
- C. 当 $\omega = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增
- D. 若 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最小值为 -2 , 则 ω 的取值范围为 $\omega \leq \frac{7}{6}$
9. 《孙子算经》是中国古代重要的数学著作, 上面记载了一道有名的“孙子问题”, 后来南宋数学家秦九韶在《数书九章·大衍求一术》中有将此问题系统解决. “大衍求一术”属现代数论中的一次同余式组问题, 后传入西方, 被称为“中国剩余定理”. 现有一道同余式组问题: 将正整数中, 被 3 除余 2 且被 5 除余 1 的数, 按由小到大的顺序排成一列数, 则 281 是第几个数
- A. 18 B. 19 C. 20 D. 21
10. 设 P 为直线 $l: x - y + 1 = 0$ 上一点, 过 P 作圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为
- A. $8\sqrt{3} - 12$ B. 0 C. $12 - 8\sqrt{3}$ D. $8\sqrt{2} - 12$
11. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA = 2$. 点 E, F, G 分别为棱 AB, AD, PC 的中点, 下列说法错误的是
- A. $AG \perp$ 平面 PBD
- B. 直线 FG 和直线 AC 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$
- C. 过点 E, F, G 的平面截四棱锥 $P-ABCD$ 所得的截面为五边形
- D. 当点 T 在平面 $ABCD$ 内运动, 且满足 $\triangle AGT$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ 时, 动点 T 的轨迹是圆
- 
12. 已知函数 $f(x) = \frac{k \cdot 2^x - 1}{2^x + k} (k \in \mathbb{R})$ 是定义域不为 \mathbb{R} 的奇函数. 定义函数 $\varphi(x) = (f(x) + 1)^2 + a|f(x) + 1| + a^2 - 7 (a \in \mathbb{R})$. 下列说法错误的是
- A. $k = -1$
- B. $f(x)$ 在定义域上单调递增
- C. 函数 $\varphi(x)$ 不可能有四个零点
- D. 若函数 $\varphi(x)$ 仅有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 满足 $x_1 < x_2 < x_3$ 且 $x_1 + x_3 = 0$, 则 a 的值唯一确定且 $a \in (-3, -2)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 2, 则 $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{FD} = \underline{\quad}$.
14. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 2)$ 的焦点为 F , 点 M 为 C 上一点, 点 N 为 x 轴上一点, 若 $\triangle FMN$ 是边长为 2 的正三角形, 则 p 的值为 $\underline{\quad}$.

15. 设数列 $\{a_n\}$ 满足下列三条性质: ① $a_1 \geq -1$ 且 $a_2 = -1$; ② $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{4n-1} < a_{4n}$; ③ $\forall m, n \in \mathbb{N}^*, a_{m+n} \in \{a_m + a_n + 1, a_m + a_n + 2\}$. 则 $a_5 =$ _____.



16. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = 8$, 底面 $\triangle ABC$ 的边长为 2, 用一个平面 α 截此三棱柱, 截面 α 与侧棱 AA_1, BB_1, CC_1 分别交于点 M, N, P , 且 $\triangle MNP$ 为直角三角形, 给出下列四个结论: ① 当 $\triangle MNP$ 为等腰直角三角形时, 斜边与底面所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$; ② 当截面 MNP 将三棱柱截成体积相等的两个几何体时, $\triangle MNP$ 的直角顶点一定为所在侧棱的中点; ③ 截面 $\triangle MNP$ 面积的最大值为 $\sqrt{65}$; ④ 平面 α 与三棱柱底面所成锐角的余弦值最大为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 其中正确结论的序号为 _____.

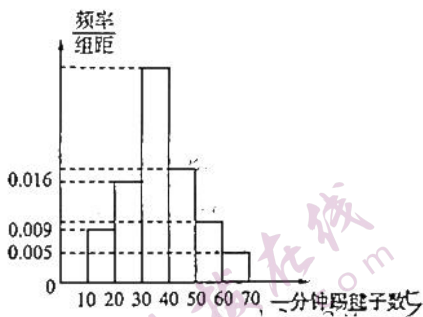
三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生按照要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

为丰富学生在校的课余生活, 某校高三年级倡导学生积极参加踢毽子、投篮、射门等体育活动, 各班拟推选“运动健将”组建班级代表队参与年级组织的体育比赛, 年级依据各班团体和个人项目成绩的总分排名给予表彰。

(1) 踢毽子是团体项目之一, 班级人均一分钟踢毽子数不低于 37 个就认定为优秀。A 班利用体育课进行一分钟踢毽子练习, 体育委员统计出同学们的成绩(全介于 10 到 70 之间)并作出频率分布直方图如图所示(原始成绩单丢失)。已知该频率分布直方图后四组“柱高”依次成等比数列, 假若以这次练习的成绩做评价, 该班是否能达到优秀标准? 请说明你的判断理由。



(2) 年级组织的竞技比赛中设有定点投篮和射门两个个人项目, 竞赛规则如下:

参赛选手从甲、乙两种方式中任选一种进行比赛, 若投中或射中就称之为成功。

甲方式: 从投篮、射门两项中通过抽签等可能地选择其中一个项目连续测试两次;

乙方式: 从投篮、射门两项中通过抽签等可能地选择其中一个项目进行测试, 若该项目成功则

项目接着进行测试, 否则重复测试该项目, 此方式也只测试两次。

积分规则: 无论选甲、乙哪种方式, 若某项目首次测试成功就记 5 分, 失败则记 0 分; 再次测试该项目时, 成功只记 4 分, 失败仍记 0 分。

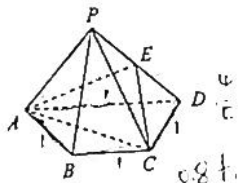
A 班推选 a 同学代表班级从甲、乙两种方式中选择一种参加个人项目比赛, 已知 a 同学投篮和射门的命中率分别为 $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}$, 且前后两项测试不会相互影响, 以参加比赛的得分期望为标准, 请问 a 同学该选择哪种方式?

18. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PAC$ 为等边三角形, 平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$, E 为 PD 的中点, 底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $BC \parallel AD$, $AD = 2$, $AB = BC = CD = 1$.

(1) 证明: $PA \perp CD$;

(2) 求二面角 $P-CE-A$ 的余弦值。



(1)

19. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = \frac{3}{4}, a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = \frac{a_n}{2n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 证明: 数列 $\left\{\frac{a_n}{2n-1}\right\}$ 为等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2, g(x) = x + \frac{6}{5}\sin x$.

(1) 若 $x > 0$, 直线 l 是 $f(x)$ 的一条切线, 求切线 l 的倾斜角 θ 的取值范围;

(2) 求证: $f(x) > g(x)$ 对于 $x \in (-2, +\infty)$ 恒成立.

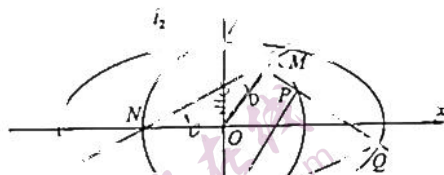
(参考数据: $e^2 \approx 2.19, e^3 \approx 2.85, \sqrt{2} \approx 1.41, \sqrt{3} \approx 1.73, \pi \approx 3.14$)

21. (本小题满分 12 分)

如图, 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 $l_1: y = \frac{1}{2}(x+b)$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = b^2$ 交于 M, N 两点, $|MN| = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) A, B 为椭圆 E 的上、下顶点, 过点 A 作直线 $l_2: y = kx + b (k < 0)$ 交圆 O 于点 P , 交椭圆 E 于点 $Q (P, Q$ 位于 y 轴的右侧), 直线 BP, BQ 的斜率分别记为 k_1, k_2 , 试用 k 表示 $k_1 + \frac{1}{4k_2}$, 并求当 $k_1 + \frac{1}{4k_2} \in \left[2, \frac{5}{2}\right)$ 时, $\triangle BPQ$ 面积的取值范围.



(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多选, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10 分)

在平面坐标系 xOy 中, 圆 M 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 + 2\cos\alpha \\ y = 2 + 2\sin\alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数})$. 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho \cos\theta = 4 \tan\theta$.

(1) 求圆 M 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 过圆 M 的圆心作直线 l 交曲线 C 于 A, B 两点, 若 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} = 1$, 求直线 l 的直角坐标方程.

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10 分)

设 a, b, c 都是正数, $f(x) = |x-a| + |x+b| + c$, 且 $f(x)$ 的最小值为 1.

(1) 求 $a+b+c$ 的值;

(2) 证明: $a^{3a-1} \cdot b^{3b-1} \cdot c^{3c-1} \geq 1$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线