江西省重点中学盟校2023届高三第二次联考

数学（理）试题

命题：九江市同文中学 陈劲　　赣州三中 朱同亮　　临川二中 王晶

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{x|x^2<4\}$，$B=\{x|\log_2(x+1)<2\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$(-2,3)$　　B．$(-2,2)$　　C．$(-1,2)$　　D．$(0,3)$

【解析】由 $x^2<4$ 得：$-2<x<2$，即 $A=(-2,2)$；由 $\log_2(x+1)<2$ 得：$-1<x<3$，即 $B=(-1,3)$；

$\therefore A\cap B=(-1,2)$.故选：C.

2．已知复数 $z=1+\mathrm{i}$，$\bar{z}$ 是 z 的共轭复数,则 $\frac{1}{z\cdot\bar{z}-z}=$（　）

A．$1+\mathrm{i}$　　B．$\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$　　C．$1-\mathrm{i}$　　D．$\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}$

【解析】因为 $z=1+\mathrm{i}$，则 $z\cdot\bar{z}=2$,所以 $\frac{1}{z\cdot\bar{z}-z}=\frac{1}{1-\mathrm{i}}=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$，故选：B.

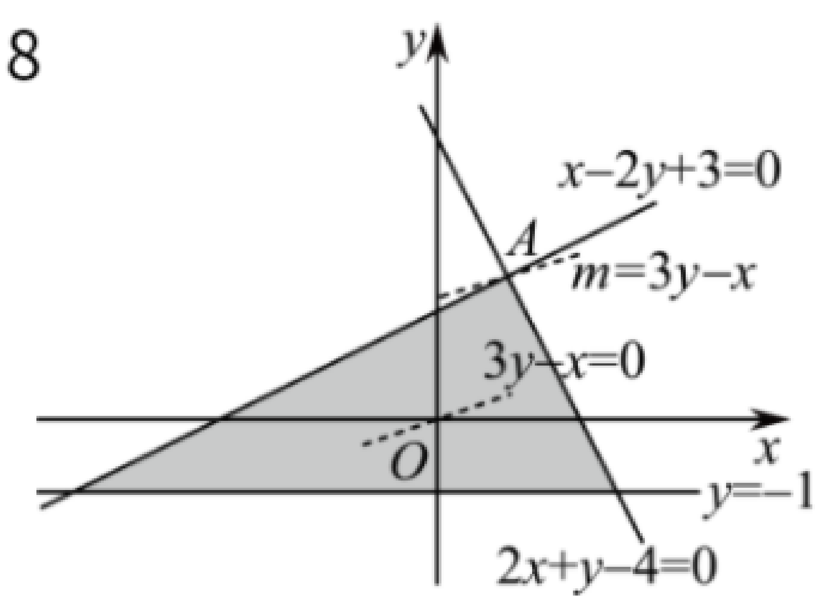
3．设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_3=3$，$S_7=14$，则公差 $d=$（　）

A．-1　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

【解析】$\because S_7=7a_4=14$，$\therefore a_4=2$，$\therefore d=a_4-a_3=-1$．故选：A.

4．若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}y+1\ge 0\\2x+y-4\le 0\\x-2y+3\ge 0\end{cases}$，则 $z=3y-x$ 的最大值为(　)

A．$-\frac{1}{2}$　　B．2　　C．5　　D．8



【解析】画出可行域如下图所示，由图可知，

由 $\begin{cases}x-2y+3=0\\2x+y-4=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$，设 $A(1,2)$，

目标函数 $z=3y-x$ 在点 $A(1,2)$ 处取得最大值 $z=3\times 2-1=5$，故选：C.

5.“$a=1$”是“函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+ax)$ 为奇函数”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【解析】 $a=\pm1$ 时，$f(x)$ 为奇函数,故选：A.

6.双曲线 $C:\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{m^2-m+4}=1(m>0)$ 的离心率最小时，C 的渐近线方程为（　）

A. $x\pm 2y=0$　　　B. $2x\pm y=0$　　　C. $\sqrt{3}x\pm y=0$　　　D. $x\pm\sqrt{3}y=0$

解：由已知：$a^2=m, b^2=m^2-m+4$，　离心率 $e^2=\dfrac{b^2}{a^2}+1=\dfrac{m^2+4}{m}=m+\dfrac{4}{m}\geq 4$，

当且仅当 $m=\dfrac{4}{m}$，即 $m=2(m>0)$ 时等号成立，此时 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，故选 C.

7.将函数 $f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+\cos^2 x-\sin^2 x$的图象向右平移$\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象．函数 $g(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，则φ 的最小值为（）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　　D. $\dfrac{5\pi}{12}$

【解析】由 $f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+\cos^2 x-\sin^2 x=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$，所以 $g(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6}-2\varphi)$．

又 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 是函数 $g(x)$ 的一个极值点，所以$2\times\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}-2\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

得$\varphi=-k\cdot\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$．当 $k=0$时，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$．故选：A.

8．设函数 $f(x)=a^2x+\dfrac{1}{x-1}+1(x>1)$，在区间 $(0,2)$ 随机抽取两个实数分别记为 a,b，则 $f(x)>b^2$ 恒成立的概率是（　）

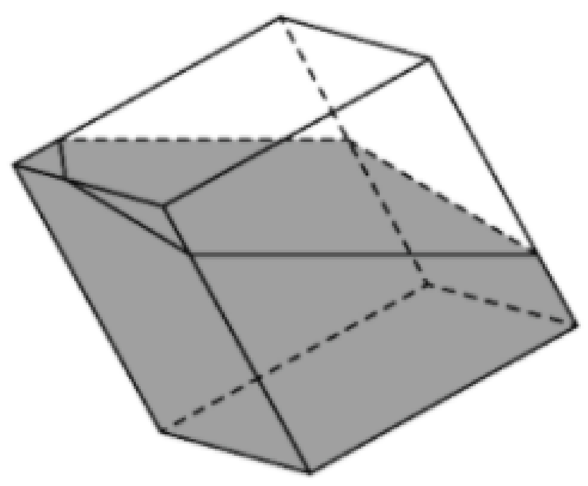
A. $\dfrac{1}{8}$　　　B. $\dfrac{1}{4}$　　　C. $\dfrac{3}{4}$　　　D. $\dfrac{7}{8}$

【解析】 $f(x)=a^2x+\dfrac{1}{x-1}+1=a^2(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+1+a^2\geq 2a+1+a^2=(a+1)^2$

当且仅当 $x=\dfrac{1}{a}+1>1$时，取"="，所以 $f(x)_{\min}=(a+1)^2$，于是 $f(x)>b^2$ 恒成立就转化为$(a+1)^2>b^2$ 成立；因为若 $a,b\in(0,2)$，所以等价于 $a+1>b$，由几何概型，

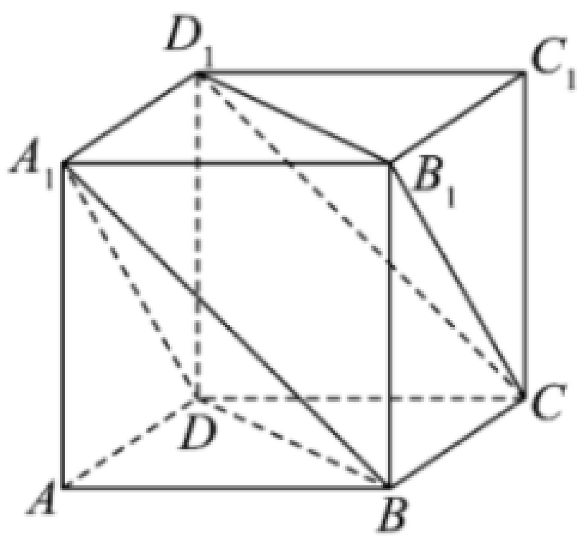
其概率为$1-\dfrac{\frac{1}{2}}{4}=\dfrac{7}{8}$.故选：D.

9．如图，一个棱长1分米的正方体型封闭容器中盛有 V 升的水，若将该容器任意放置均不能使水平面呈三角形，则 V 的取值范围是(　　)



A. $(\dfrac{1}{6},\dfrac{5}{6})$　　　B. $(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3})$　　　C. $(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3})$　　　D. $(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{2})$

解析：将该容器任意放置均不能使水平面呈三角形，则如图，水最少的临界情况为，水面为面 A_1BD，水最多的临界情况为多面体 $ABCDA_1B_1D_1$，水面为 BC_1D_1，



因为 $V_{A-A_1BD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$，

$V_{ABCDA_1B_1D_1}=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_{C-B_1C_1D_1}=1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{5}{6}$，

所以 $\frac{1}{6}<V<\frac{5}{6}$，即 $V\in(\frac{1}{6},\frac{5}{6})$．故选：A．

10．已知斜率为 k 的直线 l 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，且与抛物线 C 交于 A,B 两点，抛物线 C 的准线上一点 $M(-1,-1)$ 满足 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则 $|AB|=$（　　）

A．$3\sqrt{2}$　　B．$4\sqrt{2}$　　C．5　　D．6

【解析】易知 $p=2$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1x_2=1,y_1y_2=-4$，$\overrightarrow{MA}=(x_1+1,y_1+1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2+1,y_2+1)$，$\because\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，$\therefore(x_1+1)(x_2+1)+(y_1+1)(y_2+1)=0$，

化简得 $x_1+x_2+y_1+y_2=1$，设 A,B 中点坐标为 (x_0,y_0)，则 $x_0+y_0=\frac{1}{2}$①

又由直线的斜率公式得 $k=k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}=\frac{4}{y_1+y_2}=\frac{2}{y_0}$，$k=\frac{y_0}{x_0-1}$

$\therefore\frac{2}{y_0}=\frac{y_0}{x_0-1}$，即 $y_0^2=2(x_0-1)$②由①、②解得 $x_0=\frac{3}{2}$

$\therefore|AB|=x_1+x_2+p=2x_0+p=5$，答案选 C．

11．若 $a=\ln(1+e),b=\frac{1}{e}+1,c=\sqrt{e}$，则(　　)

A．$a>b>c$　　B　$c>b>a$　　C．　$c>a>b$　　D．$b>a>c$

解析：令 $f(x)=\ln(1+x)-x(x>0)$，$f'(x)=\frac{-x}{1+x}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又 $f(0)=0$，所以 $\ln(1+x)-x<0$，即 $\ln(1+x)<x$．

令 $x=\frac{1}{e}$，则 $\ln(1+\frac{1}{e})<\frac{1}{e}$，则 $\ln(1+\frac{1}{e})+1<\frac{1}{e}+1$，即 $\ln(1+e)<\frac{1}{e}+1$，

所以 $a<b$．由 $\ln(1+\frac{1}{e})<\frac{1}{e}$，得 $1+\frac{1}{e}<e^{\frac{1}{e}}<e^{\frac{1}{2}}$，所以 $b<c$，

综上 $c>b>a$．故选：B．

12.伯努利双纽线（简称双纽线）是瑞士数学家伯努利（$1654\sim1705$）在1694年提出的。伯努利将椭圆的定义作了类比处理，指出是到两个定点距离之积的点的轨迹是双纽线；曲线的形状类似打横的阿拉伯数字8，或者无穷大的符号 ∞.在平面直角坐标系 xOy 中，

到定点 $A(-a,0),B(a,0)$ 的距离之积为 $a^2(a>0)$ 的点的轨迹 C 就是伯努利双纽线，若

点 $P(x_0, y_0)$ 是轨迹 C 上一点，则下列说法正确的是（　　）

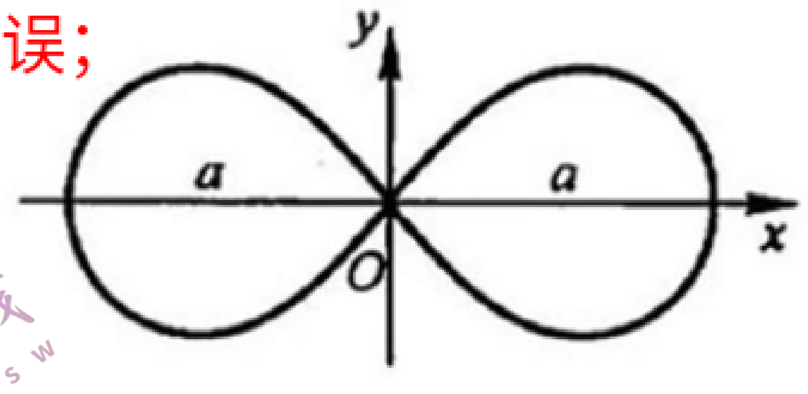
①曲线 C 关于原点中心对称；　　　　② $x_0 \in [-2a, 2a]$；

③直线 $y=x$ 与曲线 C 只有一个交点；　④曲线 C 上不存在点 P，使得 $|PA|=|PB|$.

A．①②　　　B．①③　　　C．②④　　　D．③④

【解析】由定义：曲线 $C:(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$，如图所示：所以①正确，④错误；

令 $y=0$，解得：$x=0$ 或 $x=\pm\sqrt{2}a$，得 $x_0\in[-\sqrt{2}a,\sqrt{2}a]$，所以②错误；



根据曲线 $C:(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$，可知 $x^2\ge y^2$，

可得直线 $y=x$ 与曲线 C 只有一个交点，所以③正确，故选：B.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{5\pi}{6}$，且 $|\vec{a}|=\sqrt{3},|\vec{b}|=2$，则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=$__________.

解：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=|\vec{a}|^2-2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\frac{5\pi}{6}=3-2\times4-2\sqrt{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-2$；【答案】$-2$

.

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^5, x>1,\\ x^2+2, x\le1,\end{cases}$ 则当 $0<x<1$ 时，$f(f(x))$ 的展开式中 x^4 的系数为

__________.

解析：$0<x<1$ 时，$f(x)=x^2+2\in(2,3)$，$f(f(x))=f(x^2+2)=(x^2+3)^5$，

展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1}=C_5^r(x^2)^{5-r}3^r$，故 $r=3$ 时，$T_4=C_5^3x^43^3=270x^4$，

$\therefore$ x^4 的系数 270．【答案】270．

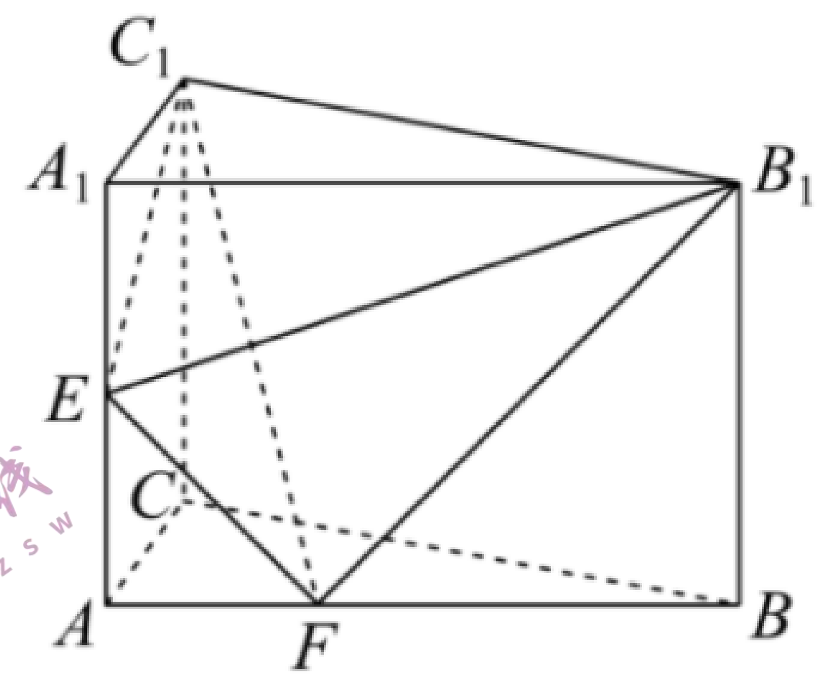
15．某软件研发公司对某软件进行升级，主要是软件程序中的某序列 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$ 重新编辑，编辑新序列为 $A^*=\left\{\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_2},\frac{a_4}{a_3},\cdots\right\}$，它的第 n 项为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$，若序列 $(A^*)^*$ 的所有项都是 2，且 $a_4=1$，$a_5=32$，则 $a_1=$___________.

解析：A^* 的第 $n+1$ 项为 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$，故 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\div\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}a_n}{a_{n+1}^2}=2$，即 $a_n=\frac{2a_{n+1}^2}{a_{n+2}}$

因为 $a_4=1$，$a_5=32$，所以 $a_3=\dfrac{2a_4^2}{a_5}=\dfrac{2}{32}=\dfrac{1}{16}$，$a_2=\dfrac{2a_3^2}{a_4}=\dfrac{1}{128}$，$a_1=\dfrac{2a_2^2}{a_3}=\dfrac{1}{512}$.

【答案】$\dfrac{1}{512}$.

16. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp BC, AC=1, AA_1=2, AB=3$，点 E,F 分别是棱 AA_1, AB 上的动点，当 $C_1E+EF+FB_1$ 最小时，三棱锥 B_1-C_1EF 外接球的表面积为______.



【解析】如图：把侧面 AA_1C_1C 沿 AA_1 展开到平面 $AA_1C_1'C'$ 与平面 AA_1B_1B 共面的位置.延长 B_1B 到 B_1'，使得 $B_1B=BB_1'$，当 C_1',E,F,B_1' 四点共线时，$C_1E+EF+FB_1$ 的长度最小，

此时，$C_1E=EF=\sqrt{2}, FB_1=B_1C_1=2\sqrt{2}, B_1E=\sqrt{10}$，所以 $EF\perp FB_1, B_1C_1\perp C_1E$，所以三棱锥 B_1-C_1EF 外接球的直径为 $B_1E=\sqrt{10}$，半径 $R=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，表面积为 $4\pi R^2=10\pi$.【答案】10π.

三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.已知 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，ΔABC 的面积为 S，$a^2+b^2-c^2=2S$.

（1）求 $\cos C$；

（2）若 $a\cos B+b\sin A=c$，$a=\sqrt{5}$，求 b.

解：（1）由已知 $S=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，由余弦定理 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，

得 $\sin C=2\cos C$，.................3 分

得 $\tan C=2>0$，所以 $C\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ....6 分

（2）由正弦定理得 $\sin A\cos B+\sin B\sin A=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

$\sin A=\cos A$，.................8 分

所以 $A=\frac{\pi}{4}$，由 $\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$，得 $\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，.................10 分

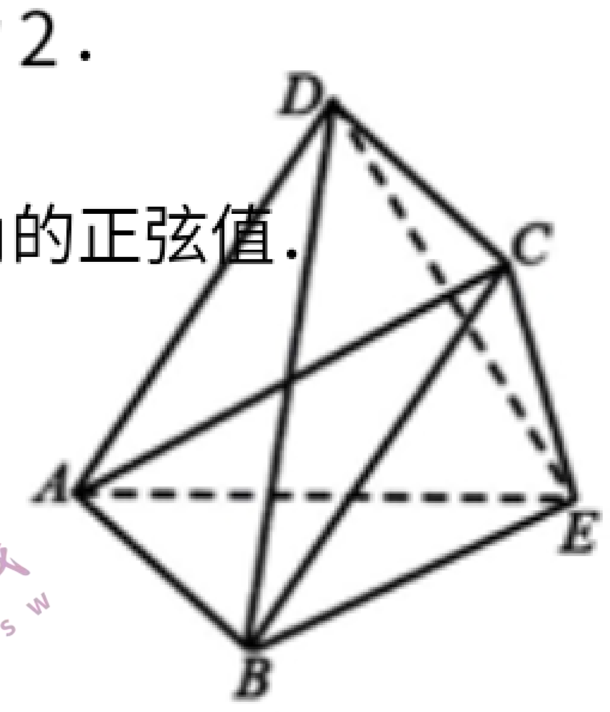
所以 $\sin B=\sin(A+C)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，由正弦定理：$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=3$.

.................12 分

18.如图，四棱锥 $E-ABCD$ 中，除 EC 以外的其余各棱长均为 2.

(1)证明：平面 $BDE\perp$ 平面 ACE；

(2) 若平面 $ADE\perp$ 平面 ABE，求直线 DE 与平面 BCE 所成角的正弦值.



解：(1)证明：由已知四边形 $ABCD$ 为菱形；所以 $AC\perp BD$，

设 AE 的中点为 O，连结 OB,OD，因为 $BA=BE,DA=DE$，

所以 $OB\perp AE,OD\perp AE,OB\cap OD=O$，所以 $AE\perp$ 平面 OBD，

.................3 分

又 $BD\subset$ 平面 OBD，所以 $AE\perp BD$，又 $AE\cap AC=A$，所以 $BD\perp$ 平面 ACE，

又 $BD\subset$ 平面 BDE，所以平面 $BDE\perp$ 平面 ACE；

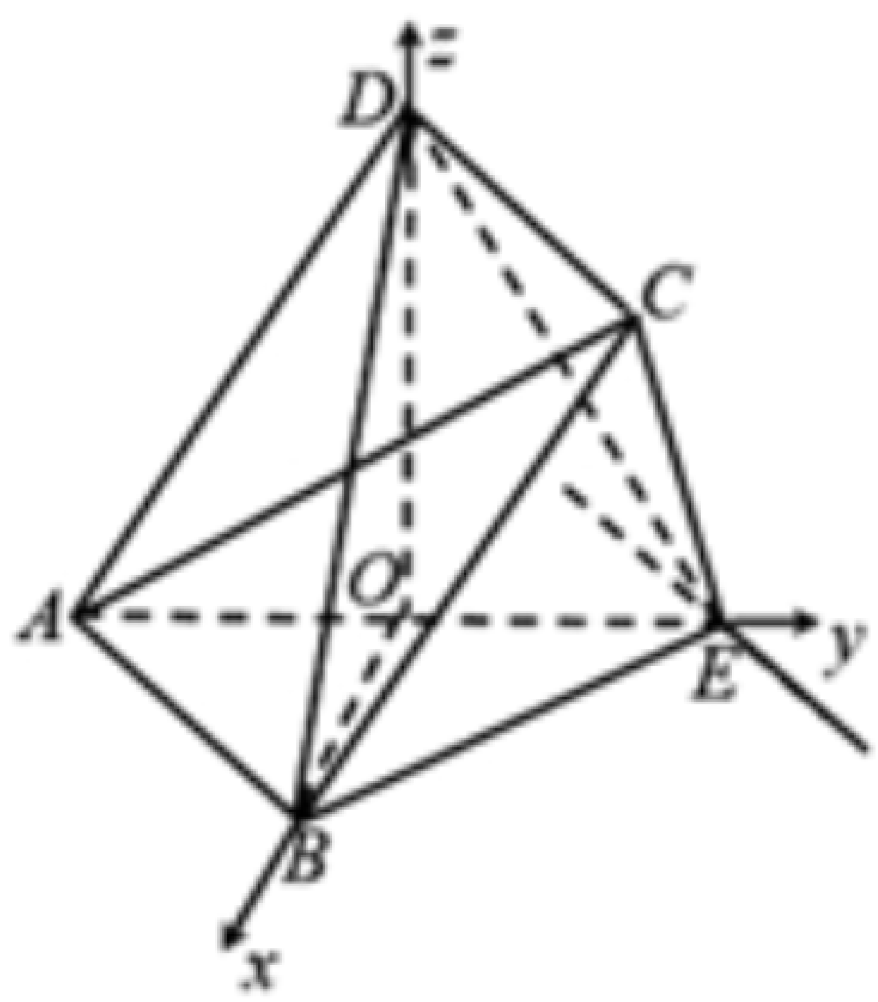
.................6 分

（2）因为平面 $ADE\perp$ 平面 ABE，平面 $ADE\cap$ 平面 $ABE=AE$， $DO\perp DE$，

所以 $DO\perp$ 平面 ABE，且 $DO=\sqrt{3}$，

.................7 分

以 O 为原点，OB,OE,OD 分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,-1,0),B(\sqrt{3},0,0),D(0,0,\sqrt{3}),E(0,1,0)$

所以 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=(0,1,\sqrt{3}),\overrightarrow{BE}=(-\sqrt{3},1,0),\overrightarrow{DE}=(0,1,-\sqrt{3})$

设直线 DE 与平面 BCE 所成角为 θ，

平面 BCE 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=y+\sqrt{3}z=0,\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-\sqrt{3}x+y=0$, 取 $x=1$，

得 $\vec{n}=(1,\sqrt{3},-1)$

则 $\sin\theta=\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{DE}>\right|=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 为所求. ....12 分

19.文具盒里装有 7 支规格一致的圆珠笔，其中 4 支黑笔，3 支红笔. 某学校甲、乙、丙三位教师共需取出 3 支红笔批阅试卷，每次从文具盒中随机取出一支笔，若取出的是红笔，则不放回；若取出的是黑笔，则放回文具盒，继续抽取，直至将 3 支红笔全部抽出.

（1）在第 2 次取出黑笔的前提下，求第 1 次取出红笔的概率；

（2）抽取 3 次后，记取出红笔的数量为 X，求随机变量 X 的分布列；

（3）因学校临时工作安排，甲教师不再参与阅卷，记恰好在第 n 次抽取中抽出第 2 支红笔的概率为 P_n，求 P_n 的通项公式.

解析：（1）记事件 A: 第 1 次取出红笔；事件 B: 第 2 次取出黑笔. 则 $P(B)=\dfrac{3}{7}\times\dfrac{4}{6}+\dfrac{4}{7}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{30}{49}$，$P(AB)=\dfrac{3}{7}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{7}$. 所以，$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{7}{15}$

....................3 分

（2）随机变量 X 可取 $0,1,2,3$. ....4 分

所以，$P(x=0)=(\dfrac{4}{7})^3=\dfrac{64}{343}$，$P(x=1)=\dfrac{3}{7}\times\dfrac{4}{6}\times\dfrac{4}{6}+\dfrac{4}{7}\times\dfrac{3}{7}\times\dfrac{4}{6}+\dfrac{4}{7}\times\dfrac{4}{7}\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{508}{1029}$，

$P(x=2)=\dfrac{3}{7}\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{7}\times\dfrac{4}{6}\times\dfrac{2}{6}+\dfrac{4}{7}\times\dfrac{3}{7}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{214}{735}$，$P(x=3)=\dfrac{3}{7}\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{35}$.

所以 x 分布列为：

x	0	1	2	3
p	$\dfrac{64}{343}$	$\dfrac{508}{1029}$	$\dfrac{214}{735}$	$\dfrac{1}{35}$

......................................8 分

(3)由题意知：前 $n-1$ 次取了 1 次红笔，第 n 次取红笔.则：

$$p_n=\left[\frac{3}{7}\times(\frac{4}{6})^{n-2}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}\times(\frac{4}{6})^{n-3}+\cdots+(\frac{4}{7})^{n-2}\times\frac{3}{7}\right]\times\frac{2}{6}$$

$$=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\left[(\frac{2}{3})^{n-2}+\frac{4}{7}\times(\frac{2}{3})^{n-3}+\cdots+(\frac{4}{7})^{n-2}\right]=\frac{1}{7}\times(\frac{2}{3})^{n-2}\times\left[1+(\frac{4}{7}\times\frac{3}{2})+(\frac{4}{7}\times\frac{3}{2})^2\cdots+(\frac{4}{7}\times\frac{3}{2})^{n-2}\right]$$

$$=\frac{1}{7}(\frac{2}{3})^{n-2}\frac{1-(\frac{6}{7})^{n-1}}{1-\frac{6}{7}}=(\frac{2}{3})^{n-2}[1-(\frac{6}{7})^{n-1}](n\geqslant 2,n\in N^{+})$$ ....12 分

20.设 A,B,C 为椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 上的三点，且点 A,C 关于原点对称，

$k_{AB}\cdot k_{BC}=-\dfrac{1}{2}$.

（1）求椭圆 E 的方程；

(2) 若点 B 关于原点的对称点为 D，且 $k_{AC}\cdot k_{BD}=-\dfrac{1}{2}$，证明：四边形 $ABCD$ 的面积为定值

.

解：（1）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $C(-x_1,-y_1)$，$\dfrac{x_1^2}{a^2}+y_1^2=1,\dfrac{x_2^2}{a^2}+y_2^2=1$，

两式相减，得 $\dfrac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+y_2^2-y_1^2=0\Rightarrow y_2^2-y_1^2=-\dfrac{x_2^2-x_1^2}{a^2}\Rightarrow\dfrac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\dfrac{1}{a^2}$，

又因为 $k_{AB}\cdot k_{BC}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\dfrac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\dfrac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\dfrac{1}{a^2}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $a^2=2$，

所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.................5 分

（2）由对称性，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $S_{\square ABCD}=4S_{\triangle OAB}$，

设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，联立 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，消去 y 得：

$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2},x_1\cdot x_2=\dfrac{2m^2-2}{1+2k^2}$，

且 $\Delta=16k^2m^2-8(m^2-1)(1+2k^2)>0\Rightarrow 8(1+2k^2-m^2)>0$，

.................7 分

由 $k_{AC}\cdot k_{BD}=-\dfrac{1}{2}$ 得 $\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-\dfrac{1}{2}$，

$2y_1y_2+x_1x_2=0\Rightarrow 2(kx_1+m)(kx_2+m)+x_1x_2=(2k^2+1)x_1x_2+2km(x_1+x_2)+2m^2=0$

$(2m^2-2)-\dfrac{8k^2m^2}{1+2k^2}+2m^2=0\Rightarrow 1+2k^2=2m^2$

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{1+k^2}\sqrt{8(1+2k^2-m^2)}}{1+2k^2}=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}}{|m|}$

.................10 分

原点到直线直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以 $S_{\square ABCD}=4S_{\Delta OAB}=4\times\dfrac{1}{2}|AB|d=2\sqrt{2}$ 为定值.................12 分

21. 已知函数 $f(x)=ax(\ln x-2)-e^{1-x}$.

(1) 当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 若 $f(x)$ 存在最小值 m，且 $m+3a\le 0$，求 a 的取值范围.

解析：（1）当 $a=-1$ 时，$f(x)=2x-x\ln x-e^{1-x}$，$f'(x)=1-\ln x+e^{1-x}$，

$k=f'(1)=2$，$f(1)=1$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=2x-1$.

....3 分

（2）$f'(x)=a\ln x+e^{1-x}-a$.

当 $a=0$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，$f(x)$ 无最小值，不符题意；

当 $a<0$ 时，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，且 $f'(1)=1-a>0$，$f'(e^{\frac{a-1}{a}})=e^{\frac{1}{a}}-1<0$

所以，$\exists x_0\in(1,e^{\frac{a-1}{a}})$ 有 $f'(x_0)=0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递增，在 $(x_0,+\infty)$ 递减，

$f(x)$ 无最小值，不符题意；............ ....5 分

当 $a>0$ 时，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=\dfrac{a}{x}-e^{1-x}=\dfrac{a-xe^{1-x}}{x}$，

设 $t(x)=a-xe^{1-x}$，则 $t'(x)=(x-1)e^{1-x}$，令 $t'(x)=0$ 得 $x=1$，

所以 $t(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，$t(x)_{\min}=a-1$. ....6 分

（i）若 $a>1$，则 $t(x)>0$，即 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，即 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增.

又 $f'(1)=1-a<0$，$f'(e)=e^{1-e}>0$，所以 $\exists x_1\in(1,e)$ 有 $f'(x_1)=0$，

即 $a(\ln x_1-1)+e^{1-x_1}=0\Rightarrow a=\dfrac{e^{1-x_1}}{1-\ln x_1}$，且 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 递减，在 $(x_1,+\infty)$ 递增，

此时 $m=f(x_1)=\dfrac{e^{1-x_1}}{1-\ln x_1}(\ln x_1-2)x_1-e^{1-x_1}$，

$m+3a=\frac{e^{1-x_1}}{1-\ln x_1}(\ln x_1-2)x_1+3\frac{e^{1-x_1}}{1-\ln x_1}-e^{1-x_1}=\frac{(x_1+1)e^{1-x_1}}{1-\ln x_1}\cdot\left[\ln x_1-\frac{2(x_1-1)}{x_1+1}\right]$,

设 $h(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)}\geq 0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增

.

由于 $1<x_1<e$， $h(x_1)>h(1)=0$，此时 $m+3a>0$， $m+3a\leq 0$ 不成立；... .....8 分

(ii) 当 $a=1$ 时，由上分析易知： $f(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，

$m=f(x)_{\min}=f(1)=-3$，此时 $m+3a=0$ 符合题意；............. ....9 分

(iii) 当 $0<a<1$ 时，由于 $t(1)=a-1<0$， $t(\frac{a}{e})=a(1-e^{-\frac{a}{e}})>0$， $t(2+\frac{1}{a})>0$，

所以存在 $\xi\in(\frac{a}{e},1)$， $\eta\in(1,2+\frac{1}{a})$ 有 $f''(\xi)=f''(\eta)=0$.

所以 $f'(x)$ 在 $(0,\xi)$ 递增，在 (ξ,η) 递减，在 $(\eta,+\infty)$ 递增.

又因为 $f'(\eta)=a\ln\eta-a+e^{1-\eta}=e^{1-\eta}(\eta\ln\eta-\eta+1)$,

设 $K(\eta)=\eta\ln\eta-\eta+1$， $\eta>1$，求导易知 $K(\eta)>0$.由于 $f'(e^{-\frac{e}{a}})<0$，

故存在 $x_2\in(0,\xi)$，有 $f'(x_2)=0$.则 $f(x)$ 在 $(0,x_2)$ 递减，在 $(x_2,+\infty)$ 递增.

此时 $m=f(x_2)=\frac{e^{1-x_2}}{1-\ln x_2}(\ln x_2-2)x_2-e^{1-x_2}$， $m+3a=\frac{(x_2+1)e^{1-x_2}}{1-\ln x_2}\cdot\left[\ln x_2-\frac{2(x_2-1)}{x_2+1}\right]$

,

由于 $0<x_2<1$， $h(x_2)<h(1)=1$，此时 $m+3a\leq 0$ 成立. . ...11 分

综上， a 的取值范围是 $(0,1]$............ ....12 分

(二) 选考题：共 10 分.请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程]

已知在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ （t为参数），以坐标原点为极点， x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2=0$，点

P的极坐标是$(\frac{2\sqrt{15}}{3},\frac{2\pi}{3})$．

（1）求直线l的极坐标方程及点P到直线l的距离；

（2）若直线l与曲线C交于M,N两点，求$\triangle PMN$的面积．

解：(1) 由$\begin{cases} x=\frac{1}{2}t \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$消去$t$，得$y=\sqrt{3}x$，$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$，所以直线$l$的极坐标方程为$\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in R)$

．

点$(\frac{2\sqrt{15}}{3},\frac{2\pi}{3})$到直线$l$的距离为$d=\frac{2\sqrt{15}}{3}\times\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\sqrt{15}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{5}$．

……………5 分

（2）由$\begin{cases} \rho^2-2\rho\cos\theta-2=0 \\ \theta=\frac{\pi}{3} \end{cases}$，得$\rho^2-\rho-2=0$，所以$\rho_1+\rho_2=1,\rho_1\cdot\rho_2=-2$，

所以$|MN|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\cdot\rho_2}=3$，

则$\triangle PMN$的面积为$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}|MN|\times d=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{5}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$．

……………10 分

23.[选修 4-5：不等式选讲] 已知函数$f(x)=|mx+1|+|2x-1|,m\in R$．

(1)当$m=3$时,求不等式$f(x)>4$的解集;

(2)若$0<m<2$,且对任意$x\in R$，$f(x)\geq\frac{3}{2m}$恒成立,求m的最小值.

解：（1）当$m=3$时，$f(x)=|3x+1|+|2x-1|$，

原不等式$f(x)>4$等价于$\begin{cases} x<-\frac{1}{3} \\ -5x>4 \end{cases}$或$\begin{cases} -\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{1}{2} \\ x+2>4 \end{cases}$或$\begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ 5x>4 \end{cases}$，

解得：$x<-\frac{4}{5}$或无解或$x>\frac{4}{5}$，所以$f(x)>4$的解集为$(-\infty,-\frac{4}{5})\cup(\frac{4}{5},+\infty)$．

……………5 分

（2）$\because 0<m<2,\therefore -\frac{1}{m}<\frac{1}{2},m+2>0,m-2<0$．

则 $f(x)=|mx+1|+|2x-1|=\begin{cases}-(m+2)x, x<-\dfrac{1}{m},\\(m-2)x+2, -\dfrac{1}{m}\le x\le\dfrac{1}{2},\\(m+2)x, x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{m})$ 上单调递减，在 $[-\frac{1}{m},\frac{1}{2}]$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)_{\min}=f(\frac{1}{2})=1+\frac{m}{2}$． 因为对任意 $x\in R$, $f(x)\ge\frac{3}{2m}$ 恒成立，

所以 $f(x)_{\min}=1+\frac{m}{2}\ge\frac{3}{2m}$.又因为 $m>0$，所以 $m^2+2m-3\ge 0$，

解得 $m\ge 1$ （$m\le -3$ 不合题意）．所以 m 的最小值为 1.

……………10 分