白卷　　姓名________________　　准考证号________________

（在此卷上答题无效）

绝密★启用前

2023年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数z在复平面内对应的点为$(0,a)$，若$|z|=2$，则$a=$

A. $2i$　　B. $\sqrt{2}i$　　C. ± 2　　D. $\pm\sqrt{2}$

2. 设集合$A=\{x\in \mathbf{Z}\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，$B=\{0,2\}$，则

A. $A\subseteq B$　　B. $B\subseteq A$

C. $A\cup B=\{-2,-1,0,1,2\}$　　D. $A\cap B=\{2\}$

3. 已知$\boldsymbol{a}$为单位向量，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{4}$，则$2|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=$

A. 10　　B. 8　　C. 5　　D. 4

4. 某科研团队通过电催化结合生物合成的方式，将二氧化碳和水高效合成高纯度乙酸，并进一步利用微生物合成葡萄糖和脂肪酸（油脂），该工作的突破，为人工和半人工合成“粮食”提供了新技术. 在对照实验过程中，科研人员将收集到的实验组与对照组的实验数据进行记录如图，由于不小心被化学物质腐蚀了两个数据，已知被腐蚀前对照组的数据总值比实验组大35，被腐蚀后实验组的中位数增加了1，则

对照组与实验组被腐蚀数据分别是

					对照组		实验组					
					2	0	6	9				
	7	[illegible]	4	4	4	1	0	2	2	[illegible]	5	6
6	4	3	3	2	0	2	1	1	2	3		

A. 17;14　　B. 15;14

C. 17;15　　D. 16;13

5. 我国自主研发的世界首套设计时速达 600 公里的高速磁浮交通系统,标志着我国掌握了高速磁浮成套技术和工程化能力,这是当前可实现的“地表最快”交通工具,因此高速磁浮也被形象地称为“贴地飞行”. 若某高速磁浮列车初始加速至时速 600 公里阶段为匀加速状态,若此过程中,位移 x 与时间 t 关系满足函数 $x(t)=v_0t+\frac{1}{2}kt^2$($v_0$ 为初速度,k 为加速度且 $k\neq0$). 位移的导函数是速度与时间的关系 $v=x'(t)=v_0+kt$. 已知从静止状态匀加速至位移$\frac{10}{7}$公里需 60 s,则时速从零加速到时速 600 公里需

A. 120 s　　B. 180 s　　C. 210 s　　D. 240 s

6. 在△ABC 中,A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $\tan A=\sqrt{3}$,$b=2c$,$S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$,则 $a=$

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{3}$

7. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中,$PA=6\sqrt{3}$,$BC=6$,M,N,Q,D 分别是 AP,BC,AC,PC 的中点,平面 MQN 与平面 PBC 的交线为 l,则直线 QD 与直线 l 所成角的正弦值为

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{\sqrt{11}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 在平面中,已知点 H 到 $A(-2,0)$,$B(2,0)$ 的距离之比为$\sqrt{3}$,记点 H 的轨迹为曲线 C,直线 $x-y-3=0$ 与 C 分别相交于 M,N,且直线与坐标轴分别相交于点 P,Q,已知定点 $D(6,0)$,则$\frac{S_{\triangle MDN}}{S_{\triangle PDQ}}=$

A. $2\sqrt{23}$　　B. $\sqrt{23}$　　C. $\frac{\sqrt{23}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{23}}{3}$

9. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\theta)+\sqrt{3}\cos(\omega x+\theta)\left(\omega>0,0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$的一个零点$\dfrac{\pi}{4}$与相邻的一条对称轴间的距离为$\dfrac{\pi}{4}$,把函数$y=f(x)$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位长度,得到函数$g(x)$的图象,则$g(x)$的一个单调递减区间为

A. $\left[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{4}\right]$　　B. $\left[-\dfrac{\pi}{4},0\right]$　　C. $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$　　D. $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$

10. 已知$5a+1=5\ln 5$,$b+e^{-3}=3$,$e^{3}c+1=e^{6+e^{3}}$,则

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$　　C. $a<c<b$　　D. $c<b<a$

11. 已知椭圆$C:x^2+\dfrac{y^2}{t^2}=1$,离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,过$P(1,2)$的直线分别与C相切于A,B两点,则直线AB方程为

A. $x+y-1=0$或$x+4y-1=0$　　B. $x+4y-1=0$

C. $x+y-1=0$　　D. $x+y+1=0$或$4x+y-1=0$

12. 已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足$f(x)+f(-x)=0$,$f(1-x)=f(1+x)$,$f(x)$在区间$(0,1]$内单调且$f[f(x)-2^{x}+2^{-x}]=\dfrac{5}{2}$,则$\sum\limits_{k=1}^{2022}kf(k)=$

A. $\dfrac{5055}{2}$　　B. 5055

C. $\dfrac{5055\times1011}{2}$　　D. 1011

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 已知$2\cos^2\alpha-5\sin\alpha+1=0$,则$\cos 2\alpha=$________.

14. 已知F_1,F_2分别为双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点,从下面两个条件中任选一个,则双曲线$C$的渐近线方程为________.

①与双曲线$\dfrac{x^2}{9-k}-\dfrac{y^2}{7+k}=1$有共同焦点,且过$M(3,0)$;②过$F_1$作垂直于$x$轴的直线交双曲线$P,Q$两点,$|PQ|=\dfrac{14}{3}$且$S_{\triangle QOF_2}=\dfrac{14}{3}$.

15. 已知$f(x)=(x+1)\ln x$,$f(m)=f\left(\dfrac{1}{n}\right)$且$m\geqslant2$,则$m+2n$的取值范围是________.

16. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别为线段 A_1B 和棱 A_1D_1 上的点，$A_1M=\sqrt{2}A_1N$，EF 为过 A_1,C_1,D 三点的平面与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球截得的圆面内一条动弦且 $|EF|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. 当线段 MN 的长度最大时，直线 MN 与 EF 之间的距离为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. （12 分）

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $a_1=1$，$S_{n+1}=S_n+3a_n+4$.

（1）证明：$\{a_n+2\}$ 是等比数列；

（2）求数列 $\{a_n+2n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18. (12 分)

近年来,绿色环保和可持续设计受到社会的广泛关注,成为了一种日益普及的生活理念和方式. 可持续和绿色能源,是我们这个时代的呼唤,也是我们每一个人的责任. 某环保可持续性食用产品做到了真正的“零浪费”设计,其外包装材质是蜂蜡. 食用完之后,蜂蜡罐可回收用于蜂房的再建造. 为了研究蜜蜂进入不同颜色的蜂蜡罐与蜜蜂种类的关系,研究团队收集了黄、褐两种颜色的蜂蜡罐,对 M,N 两个品种的蜜蜂各 60 只进行研究,得到如下数据:

	黄色蜂蜡罐	褐色蜂蜡罐
M 品种蜜蜂	40	20
N 品种蜜蜂	50	10

(1)判断是否有 95%的把握认为蜜蜂进入不同颜色的蜂蜡罐与蜜蜂种类有关联?

(2)假设要计算某事件的概率 $P(B)$,常用的一个方法就是找一个与 B 事件有关的事件 A,利用公式:$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$ 求解. 现从装有 a 只 M 品种蜜蜂和 b 只 N 品种蜜蜂的蜂蜡罐中不放回地任意抽取两只,令第一次抽到 M 品种蜜蜂为事件 A,第二次抽到 M 品种蜜蜂为事件 B.

(ⅰ)证明:$P(B)=\dfrac{a}{a+b}$;

(ⅱ)研究发现,①M 品种蜜蜂飞入黄色蜂蜡罐概率为$\dfrac{2}{3}$,被抽到的概率为$\dfrac{4}{5}$;M 品种蜜蜂飞入褐色蜂蜡罐概率为$\dfrac{1}{3}$,被抽到的概率为$\dfrac{3}{5}$;

②N 品种蜜蜂飞入黄色蜂蜡罐概率为$\dfrac{5}{6}$,被抽到的概率为$\dfrac{3}{4}$;N 品种蜜蜂飞入褐色蜂蜡罐概率为$\dfrac{1}{6}$,被抽到的概率为$\dfrac{1}{2}$.

请从 M,N 两个品种蜜蜂中选择一种,求该品种蜜蜂被抽到的概率.

附:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

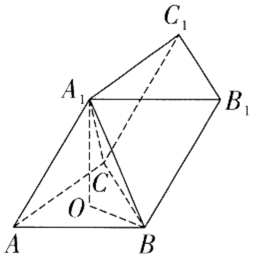
$P(K^2\geqslant k)$	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
k	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

19. （12分）

在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，O 为底面正 $\triangle ABC$ 的中心，$A_1O\perp$ 底面 ABC，$AC=AA_1=2$.

（1）证明：平面 $A_1AC\perp$ 平面 A_1BO；

（2）求 A_1C 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.



20. (12 分)

已知函数 $f(x)=(x-2)e^{x-1}-a(x-1)^2$.

(1)求函数 $f(x)$ 的极值点;

(2)设 x_1,x_2 为 $g(x)=f(x)+(3-x)e^{x-1}$ 的两个极值点,证明:$x_1x_2<[\ln(2a)+1]^2$.

21. (12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,已知点 $F(2,0)$,直线 $l:x=-2$,作直线 l 的平行线 $l':x=a(a>2)$,动点 P 满足到 F 的距离与到直线 l' 的距离之和等于直线 l 与 l' 之间的距离. 记动点 P 的轨迹为 E.

(1)求 E 的方程;

(2)过 $Q(3,1)$ 作倾斜角互补的两条直线分别交 E 于 A,B 两点和 C,D 两点,且直线 AB 的倾斜角 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$,求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中选定一题作答,并用铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑。按所涂题号进行评分,不涂、多涂均按所答第一题评分;多答按所答第一题评分。

22. [选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=-1+\dfrac{1}{2}t, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点 O 为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $3\rho^2\cos^2\theta+4\rho^2\sin^2\theta=12$.

(1)求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的参数方程;

(2)若 Q 为曲线 C_2 上一点,求点 Q 到曲线 C_1 距离的最大值.

23. [选修4-5:不等式选讲](10分)

已知 x,y,z 为正数,证明:

(1)若 $xyz=2$,则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqslant\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}$;

(2)若 $2x+y+2z=9$,则 $x^2+y^2+z^2\geqslant 9$.