秘密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

2023年广州市普通高中毕业班综合测试（一）

数　学

本试卷共5页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：1．答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡的相应位置上，并在答题卡相应位置上填涂考生号。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

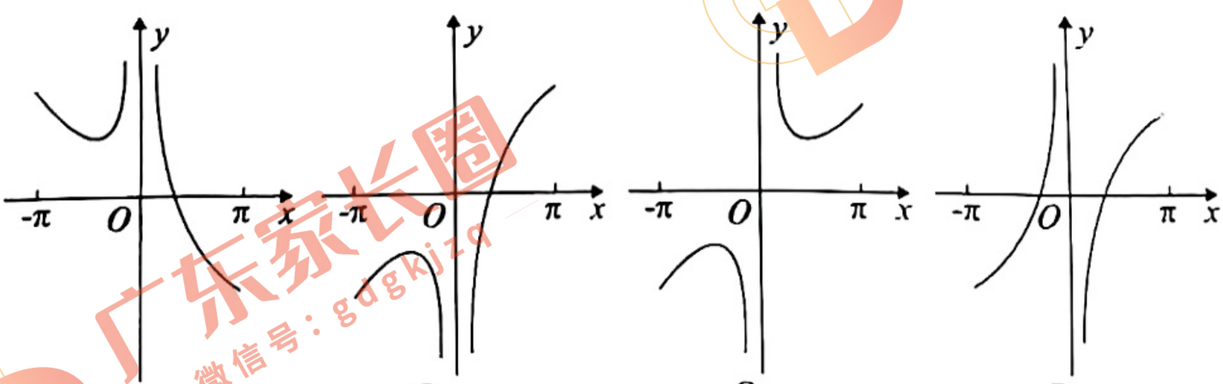
1. 若复数 $z=3-4\mathrm{i}$，则 $\dfrac{\overline{z}}{|z|}=$

A．$\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　　B．$\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　　C．$-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　　D．$-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$

2. 已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\,\middle|\,x^2-2x-3<0\right\}$，则集合 A 的子集个数为

A．3　　B．4　　C．8　　D．16

3. 函数 $f(x)=x-\dfrac{\sin x}{x^3}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的图像大致为



A．　　B．　　C．　　D．

4. 已知θ为第一象限角，$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$\tan 2\theta=$

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. “回文”是古今中外都有的一种修辞手法，如“我为人人，人人为我”等．数学上具有这样特征的一类数称为“回文数”．“回文数”是指从左到右与从右到左读都一样的正整数，如121，241142等．在所有五位正整数中，有且仅有两位数字是奇数的“回文数”共有

A. 100个　　B. 125个　　C. 225个　　D. 250个

6. 已知抛物线C的顶点为坐标原点O，焦点F在x轴上，过点$(2,0)$的直线交C于P，Q两点，且$OP\perp OQ$，线段PQ的中点为M，则直线MF的斜率的最大值为

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

7. 已知三棱锥$P-ABC$的四个顶点都在球O的球面上，$PB=PC=2\sqrt{5}$，$AB=AC=4$，$PA=BC=2$，则球O的表面积为

A. $\frac{316}{15}\pi$　　B. $\frac{79}{15}\pi$　　C. $\frac{158}{5}\pi$　　D. $\frac{79}{5}\pi$

8. 已知a，b，c均为正实数，e为自然对数的底数，若$a=be^c$，$|\ln a|>|\ln b|$，则下列不等式一定成立的是

A. $a+b<ab$　　B. $a^b<b^a$　　C. $c<\frac{a-b}{a+b}$　　D. $a^2>c+1$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

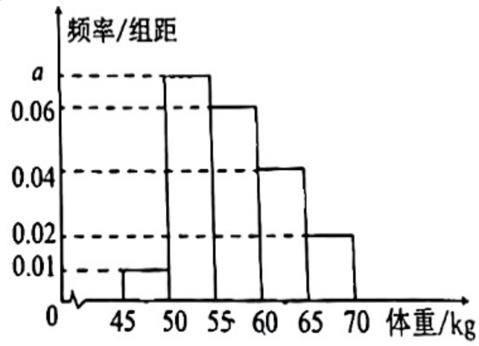
9. 某校随机抽取了100名学生测量体重．经统计，这些学生的体重数据（单位：kg）全部介于45至70之间，将数据整理得到如图所示的频率分布直方图，则

A．频率分布直方图中a的值为0.07

B．这100名学生中体重低于60 kg的人数为60

C．据此可以估计该校学生体重的第78百分位数约为62

D．据此可以估计该校学生体重的平均数约为62.5



10. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称，则

A. 函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$ 对称

B. 函数 $y=f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有 2 个极值点

C. 若 $|f(x_1)-f(x_2)|=2$，则 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{4}$

D. 若 $f\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)f\left(\beta-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}$，则 $\cos2(\alpha-\beta)=1+\cos2(\alpha+\beta)$

11. 已知函数 $f(x)=x^2+2(x\geqslant0)$，$g(x)=ae^{-x}(a>0)$，点 P，Q 分别在函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像上，O 为坐标原点，则下列命题正确的是

A. 若关于 x 的方程 $f(x)-g(x)=0$ 在 $[0,1]$ 上无解，则 $a>3e$

B. 存在 P，Q 关于直线 $y=x$ 对称

C. 若存在 P，Q 关于 y 轴对称，则 $0<a\leqslant2$

D. 若存在 P，Q 满足 $\angle POQ=90°$，则 $0<a\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2e}}$

12. 平面内到两定点距离之积为常数的点的轨迹称为卡西尼卵形线，它是 1675 年卡西尼在研究土星及其卫星的运行规律时发现的. 已知在平面直角坐标系 xOy 中，$M(-2,0)$，$N(2,0)$，动点 P 满足 $|PM|\cdot|PN|=5$，则下列结论正确的是

A. 点 P 的横坐标的取值范围是 $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$

B. $|OP|$ 的取值范围是 $[1,3]$

C. $\triangle PMN$ 面积的最大值为 $\frac{5}{2}$

D. $|PM|+|PN|$ 的取值范围是 $[2\sqrt{5},5]$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,x)$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 共线，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

14. 已知 $n\in\mathbf{N}^*$，将数列 $\{2n-1\}$ 与数列 $\{n^2-1\}$ 的公共项从小到大排列得到新数列 $\{a_n\}$，则 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}=$________

15．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，其导函数为 $f'(x)$．若 $xf'(x)-1<0$，$f(e)=2$，则关于 x 的不等式 $f(e^x)<x+1$ 的解集为____．

16．在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E、F 分别是棱 BC、CC_1 的中点，P 是侧面 ADD_1A_1 上的动点，且 PC_1 // 平面 AEF，则点 P 的轨迹长为________，点 P 到直线 AF 的距离的最小值为________．（第一个空2分，第二个空3分）

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n+2^n=2a_n+1$．

（1）求 a_1，并证明数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ 是等差数列；

（2）若 $2a_k^2<S_{2k}$，求正整数 k 的所有取值．

18．（12分）

记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．已知 $a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3}{2}b$．

（1）证明：$\sin A+\sin C=2\sin B$；

（2）若 $b=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，求△$ABC$ 的面积．

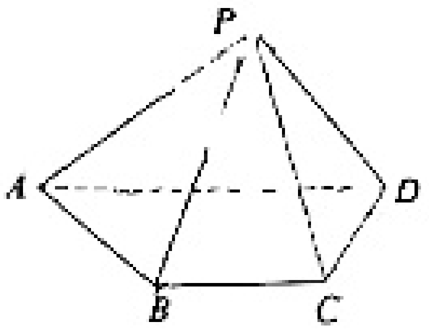
19．（12分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，△PAD 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形，

BC // AD，$CD\perp AD$，$AD=2CD=2BC=4$，$PB=2\sqrt{3}$．

（1）求证：$AD\perp PB$；

（2）求平面 PAB 与平面 $ABCD$ 夹角的正弦值．



某校组织学生参加航空航天科普知识答题竞赛，每位参赛学生答题若干次，答题赋分方法如下：第1次答题，答对得20分，答错得10分；从第2次答题开始，答对则获得上一次答题得分的两倍，答错得10分．学生甲参加答题竞赛，每次答对的概率为$\frac{3}{4}$，各次答题结果互不影响．

（1）求甲前3次答题得分之和为40分的概率；

（2）记甲第i次答题所得分数$X_i\left(i\in\mathbf{N}^*\right)$的数学期望为$E\left(X_i\right)$．

①写出$E\left(X_{i+1}\right)$与$E\left(X_i\right)$满足的等量关系式（直接写出结果，不必证明）；

②若$E\left(X_i\right)>100$，求i的最小值．

21．（12分）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，以$C$的短轴为直径的圆与直线$y=ax+6$相切．

（1）求C的方程；

（2）直线l：$y=k(x-1)\ (k\neq 0)$与C相交于A，B两点，过C上的点P作x轴的平行线交线段AB于点Q，直线OP的斜率为k'（O为坐标原点），$\triangle APQ$的面积为S_1，$\triangle BPQ$的面积为S_2，若$|AP|\cdot S_2=|BP|\cdot S_1$，判断$k\cdot k'$是否为定值？并说明理由．

22．（12分）

已知$a>0$，函数$f(x)=(1-ax)\left(e^x-1\right)$．

（1）若$a=1$，证明：当$x>0$时，$f(x)<\ln(x+1)$；

（2）若函数$h(x)=\ln(x+1)-f(x)$存在极小值点x_0，证明：$f\left(x_0\right)\geqslant 0$