# 济洛平许 2022—2023 学年高三第四次质量检测

# 理科数学参考答案

**一、选择题：** BACDC　BACCB　AD

**二、填空题：** 13．60　　14．$-\dfrac{1}{2}$　　15．538　　16．$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\right]$

**三、解答题：**

17．解：由 $c=2(a\cos C-b)$ 得 $2a\cos C=c+2b$ 由正弦定理得

$2\sin A\cos C=\sin C+2\sin B=\sin C+2\sin(A+C)=\sin C+2\sin A\cos C+2\cos A\sin C$.

所以 $2\cos A\sin C+\sin C=0$.　　　　……………………4 分

又因为 $C\in(0,\ \pi)$，所以 $\sin C\neq 0$，

所以 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$.　　　　……………………6 分

（2）由 $c^2+a^2=b^2+\sqrt{3}ac$ 得 $c^2+a^2-b^2=\sqrt{3}ac$，故 $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $B\in(0,\ \pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

所以 $C=\pi-A-B=\dfrac{\pi}{6}$.　　　　……………………7 分

由（1）可知，$b=c=2$，设 $\angle BAM=\alpha$，

则 $\angle CAN=\dfrac{\pi}{3}-\alpha$，$\angle BMA=\dfrac{5\pi}{6}-\alpha$，$\angle CNA=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$.

在 $\Delta ABM$ 中，由正弦定理可知 $AM=\dfrac{c\sin B}{\sin\angle BMA}=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)}=\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}$.　　　　…………8 分

在 $\Delta ANC$ 中，由正弦定理可知 $AN=\dfrac{b\sin C}{\sin\angle CNA}=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$.　　　　……………9 分

故 $S_{\Delta AMN}=\dfrac{1}{2}AM\cdot AN\cdot\sin\angle MAN=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\alpha}$　…10 分

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha\right)\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+1}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+1}.$$

因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以$\frac{\pi}{6}<2\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以$\frac{1}{2}<\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\le 1$.

所以$2<2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+1\le 3$. 所以$\frac{\sqrt{3}}{3}\le\frac{\sqrt{3}}{2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+1}<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

即$S_{\Delta AMN}\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ……………………12 分

18. 解：（1）由题意可得：$P(B)=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{5}$. ……………………2 分

“在第一次抽到女生的条件下，第二次抽到男生”的概率就是事件 $A$ 发生的条件下，事件 $B$ 发生的概率，则$P(A)=\frac{3}{5}$， $P(AB)=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$. ……………………4 分

故$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{4}{9}$. ……………………6 分

（2）被抽取的 4 次中男生人数 $X$ 的取值为 0，1，2，3，4 且 $X\sim B(4,\frac{2}{5})$. ……………………7 分

$P(X=0)=C_4^0\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^0=\frac{81}{625}$； $P(X=1)=C_4^1\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{216}{625}$；

$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{96}{625}$；

$P(X=4)=C_4^4\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$.

$X$的分布列：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{81}{625}$ | $\frac{216}{625}$ | $\frac{216}{625}$ | $\frac{96}{625}$ | $\frac{16}{625}$ |

……………………11 分

$X$的数学期望$E(X)=4\times\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$. ……………………12 分

19. (1)证明：设 $BD$ 交 $AC$ 于点 $O$，连接 $EO$，$FO$，因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$.

因为 $ED\perp$ 平面 $ABCD, AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AC\perp ED$.

又 $ED\cap BD=D$，所以 $AC\perp$ 平面 $BDEF$；所以 $AC\perp EO$. ……………………2 分

设 $FB$=1，由题意得 $ED$=2，$BD=2\sqrt{2}$，$DO=BO=\sqrt{2}$.

因为 $FB//ED$，所以 $FB\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $OF=\sqrt{3}$，$EO=\sqrt{6}$，$EF=3$.

因为 $EF^2=OE^2+OF^2$，所以 $EO\perp FO$. ……………………4 分

因为 $OF\cap AC=O$，所以 $EO\perp$ 平面 $ACF$. ……………………5 分

又 $EO\subset$ 平面 $EAC$，所以平面 $EAC\perp$ 平面 $FAC$. ……………………6 分

(2) 取 $EF$ 中点 $G$，连接 $OG$，所以 $OG//ED$，$OG\perp$ 底面 $ABCD$.

以 $O$ 为原点，以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OG}$ 分别为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴的正方向建立空间直角坐标系， ……7 分

因为 $\angle BAD=60^\circ$，由（1）中所设可知，$AB=AD=2\sqrt{2}$

所以，$OA=OC=\sqrt{6}$，

所以 $A(\sqrt{6},0,0)$，$F(0,\sqrt{2},1)$，$E(0,-\sqrt{2},2)$，$C(-\sqrt{6},0,0)$.

所以 $\overrightarrow{FA}=(\sqrt{6},-\sqrt{2},-1)$，$\overrightarrow{EA}=(\sqrt{6},\sqrt{2},-2)$，$\overrightarrow{EC}=(-\sqrt{6},\sqrt{2},-2)$. ……………………8 分

设平面 $FAE$ 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{FA}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EA}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{6}x-\sqrt{2}y-z=0\\ \sqrt{6}x+\sqrt{2}y-2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3}y\\ z=2\sqrt{2}y\end{cases}$

所以 $\vec{m}=(\sqrt{3},1,2\sqrt{2})$. ………………9 分

同理，可求得平面 $AEC$ 的一个法向量 $\vec{n}=(0,\sqrt{2},1)$. ……………………10 分

所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3+1+(2\sqrt{2})^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………11 分

所以二面角 $F-AE-C$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$. ……………………12 分

20. 解：（1） $b=1$，则 $e^2=1-\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow a=2$. …………3 分

所以椭圆 $C$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. …………4 分

（2）当 $l$ 斜率不为 0 时,设 $l:x=ny+3$，联立 $\begin{cases}x=ny+3,\\ x^2+4y^2=4\end{cases}\Rightarrow(n^2+4)y^2+6ny+5=0$. ………5 分

$\Delta=36n^2-20(n^2+4)=16n^2-80>0\Rightarrow n^2>5$ .

设 $Q(s,t),M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$ ，

则 $y_1+y_2=-\dfrac{6n}{n^2+4},y_1y_2=\dfrac{5}{n^2+4}$ . ……………………6 分

直线 $MQ:y-t=\dfrac{y_1-t}{x_1-s}(x-s)$ ，令 $x=3$ 得

$y_A=t+\dfrac{y_1-t}{x_1-s}(3-s)=\dfrac{t(x_1-s)+(y_1-t)(3-s)}{x_1-s}=\dfrac{t(ny_1+3-s)+(y_1-t)(3-s)}{ny_1+3-s}$

$=\dfrac{tny_1+(3-s)y_1}{ny_1+3-s}=\dfrac{(tn+3-s)y_1}{ny_1+3-s}$ . ……………………7 分

同理可得 $y_B=\dfrac{(tn+3-s)y_2}{ny_2+3-s}$ . ……………………8 分

于是 $|PA|=|PB|\Leftrightarrow|y_A|=|y_B|$

$\Leftrightarrow\left|\dfrac{(tn+3-s)y_1}{ny_1+3-s}\right|=\left|\dfrac{(tn+3-s)y_2}{ny_2+3-s}\right|\Leftrightarrow\left|\dfrac{y_1}{ny_1+3-s}\right|=\left|\dfrac{y_2}{ny_2+3-s}\right|$ .

若 $\dfrac{y_1}{ny_1+3-s}=\dfrac{y_2}{ny_2+3-s}$ ，则由 $s<3\Rightarrow y_1=y_2$ ，与直线 $l$ 的任意性矛盾；………………9 分

若 $\dfrac{y_1}{ny_1+3-s}=-\dfrac{y_2}{ny_2+3-s}$ ，则 $y_1\left(ny_2+3-s\right)+y_2\left(ny_1+3-s\right)=0$

$\Rightarrow 2ny_1y_2+(3-s)(y_1+y_2)=0\Rightarrow 10n-6n(3-s)=0\Rightarrow -8+6s=0\Rightarrow s=\dfrac{4}{3}$ . ……………11 分

所以点 $Q$ 的坐标为 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$ 或 $\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$ (当 $l$ 斜率为 0 时也成立). ……………………12 分

21. 解：（1）对函数求导可得：$f'\left(x\right)=e^x(\dfrac{1}{x}+\ln x)$ ， ……………………1 分

令 $s\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+\ln x$ 则 $s'\left(x\right)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x^2}$ .

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$s'\left(x\right)<0,m\left(x\right)$ 单调递减，$x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$s'\left(x\right)>0,s\left(x\right)$ 单调递增. ………2 分

所以，$s(x)_{\min}=s\left(1\right)=1>0$

所以，$f'\left(x\right)=s(x)>0$ ，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增. ……………………3 分

故 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间是 $\left(0,+\infty\right)$ ，无递减区间. …………………… 4 分

（2）若方程 $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ 有两个解 $x_1$ ，$x_2$ ，不妨设 $0<x_2<x_1$ ，原方程可以变形为：$\dfrac{x}{2e^x}+\ln\dfrac{x}{e^x}-m=0$ ，

设 $\dfrac{x_1}{e^{x_1}}=t_1$，$\dfrac{x_2}{e^{x_2}}=t_2$， 由 $F\left(x_1\right)=F\left(x_2\right)=0$，得 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}t_1+lnt_1-m=0\\ \dfrac{1}{2}t_2+lnt_2-m=0\end{cases}$，

……………………6 分

因为函数 $y=\dfrac{1}{2}x+\ln x-m$ 是增函数，所以 $t_1=t_2$，则 $\dfrac{x_1}{e^{x_1}}=\dfrac{x_2}{e^{x_2}}$，

设 $\dfrac{x_1}{x_2}=t\left(t>1\right)$，则 $x_2=\dfrac{\ln t}{t-1}$， $x_1=\dfrac{t\ln t}{t-1}$， ……………………8 分

欲证 $x_1x_2<1$，即证 $t\left(\dfrac{\ln t}{t-1}\right)^2<1$， 只需证 $\ln t<\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\left(t>1\right)$（*） ……………………9 分

设 $h\left(x\right)=\ln x-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$， $x>1$， $h'\left(x\right)=\dfrac{-\left(x-1\right)^2}{2x^2}$， 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上，$h'\left(x\right)<0$， $h\left(x\right)$ 单调递减，

所以 $h\left(x\right)<h\left(1\right)=0$，所以 $\ln x-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)<0\left(x>1\right)$， 令 $x=\sqrt{t}$ 即得（*）成立，

从而，命题得证． …………………… 1 2 分

22. 解：（1）曲线 $C_2$ 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{4}{\cos\theta}$，根据公式 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 可得： $x=4$，

所以曲线 $C_2$ 直角坐标方程为： $x=4$． ……………………2 分

曲线 $C_1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=t^2+\dfrac{1}{t^2},\\ y=t^2-\dfrac{1}{t^2}\end{cases}$（$t$ 为参数），即： $x^2-y^2=4$． 又 $t^2+\dfrac{1}{t^2}\ge 2$，

所以曲线 $C_1$ 的普通方程为 $x^2-y^2=4(x\ge 2)$． ……………………5 分

（2）曲线 $C_1$， $C_2$ 的交点为 $P_1(4,2\sqrt{3})$， $P_2(4,-2\sqrt{3})$，点 $M$ 的坐标为 $(-2,0)$． ……………………6 分

圆 $C_3$ 的方程为： $(x-2)^2+y^2=16$．其极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta-12=0$． ……………………7 分

设直线 $l_1$， $l_2$ 的极坐标方程分别为 $\theta=\theta_1(\rho\in R)$， $\theta=\theta_2(\rho\in R)$，

分别代入圆 $C_3$ 的极坐标方程 $\rho^2-4\rho\cos\theta-12=0$ 得，

$\rho^2-4\rho\cos\theta_1-12=0$， $|OA|\cdot|OB|=|-12|=12$； ……………………8 分

$\rho^2-4\rho\cos\theta_2-12=0$， $|OC|\cdot|OD|=|-12|=12$． ……………………9 分

所以有 $|OA|\cdot|OB|=|OC|\cdot|OD|$． ……………………10 分

23. 解：（1）函数 $g(x)=|x-1|$ 的最小值为 $m$=0. ……………………2 分

函数 $f(x)=|x-1|+|x|=\begin{cases}2x-1, & x>1\ ,\\ 1, & 0\le x\le 1,\\ 1-2x, & x<0.\end{cases}$ ……………………3 分

函数在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增， $f(0)=1$， ························4 分

所以函数 $f(x)$ 的最小值为 $n=1$. ························5 分

（2）由（1）知 $a+b+c=0$， $abc=1$. ························6 分

因为 $a+b=-c<0$， $ab=\frac{1}{c}>0$，

所以 $a<0,b<0$， $-a>0,-b>0$， $(-a)+(-b)=c=\frac{1}{ab}$. ························7 分

又因为 $ab=(-a)(-b)<(\frac{-a-b}{2})^2\ (a\neq b)$. ························8 分

所以 $\frac{1}{ab}>(\frac{2}{-a-b})^2$， 又 $(-a)+(-b)=\frac{1}{ab}$，

所以 $[(-a)+(-b)]^3>4$， 所以 $(-a)+(-b)>\sqrt[3]{4}$. ························9 分

所以 $a+b<-\sqrt[3]{4}$. ························10 分