

平许济洛 2022-2023 学年高三第二次质量检测

理科数学答案

一、选择题：（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. D 2. A 3. C 4. D 5. B 6. D
7. A 8. B 9. B 10. A 11. B 12. B

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. -4 14. -3 15. $\frac{3}{2}$ 16. $\frac{64\pi}{3}$

三、解答题：（共 70 分）

17. 解：（1）依题意， $\cos A + \sqrt{3} \sin A = \frac{a+b}{c}$ ，则 $c \cos A + \sqrt{3} c \sin A - a - b = 0$ ，

故 $\sin C \cos A + \sqrt{3} \sin C \sin A - \sin A - \sin B = 0$ ，

则 $\sin C \cos A + \sqrt{3} \sin C \sin A - \sin A - \sin(A+C) = 0$ ， 3 分

$\sin C \cos A + \sqrt{3} \sin C \sin A - \sin A - \sin A \cos C - \cos A \sin C = 0$ ，

所以 $\sqrt{3} \sin C \sin A - \sin A - \sin A \cos C = 0$ ，

由于 $0 < A < \pi$ ，所以 $\sin A > 0$ ，所以 $\sqrt{3} \sin C - 1 - \cos C = 0$ ，

故 $2 \sin(C - \frac{\pi}{6}) = 1$

由于 $0 < C < \pi$ ，则 $C = \frac{\pi}{3}$ 6 分

（2）由题意， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} ab = 4\sqrt{3}$ ，

所以 $ab = 16$ 8 分

又由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ ， $c=4$

即 $a^2 + b^2 - ab = 16$ ，所以 $a^2 + b^2 = 32$ ， 10 分

所以 $a = b = 4$ 12 分

18. 解：（1）根据年轻人标准结合图 1 可得年轻人占比为 80%，则年轻人人数为 $100 \cdot 80\% = 80$ ，则非年轻人 20 人，根据图 2 表格得健身达人所占比 60%，所以其人数为 $100 \cdot 60\% = 60$ ，根据其中年轻人占比 $\frac{5}{6}$ ，所以健身达人中年轻人人数为 $60 \cdot \frac{5}{6} = 50$ ，则非年轻人 10 人；健身爱好者人数为 $100 - 60 = 40$ ，再通过总共年轻人合计为 80 人，则健身爱好者中年轻人人数为 $80 - 50 = 30$ ，3 根据非年轻人总共为 20 人，则健身爱好者中非年轻人人数为 $20 - 10 = 10$ ，具体表格填写如下。

列联表为

	年轻人	非年轻人	合计
健身达人	50	10	60
健身爱好者	30	10	40
合计	80	20	100

$$K^2 = \frac{100 \times (50 \times 10 - 30 \times 10)^2}{80 \times 20 \times 60 \times 40} \approx 1.042 < 3.841 \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

所以没有 95% 的把握认为“健身达人”与年龄有关。 $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 知，既是年轻人又是健身达人的概率为 $\frac{1}{2}$, $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $X = 0, 1, 2, 3$,

$$P(X=0) = C_3^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \quad P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}, \quad P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

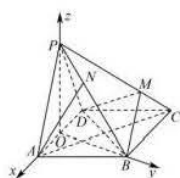
故 X 的分布列:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$X \text{ 的数学期望值 } E(X) = 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (1) 设 O 是 AD 的中点, 连接 OP, OB, 由于 $PA = PD = \sqrt{5}$, 所以 $OP \perp AD$,
 $\because$ 平面 PAD $\perp$ 平面 ABCD 且交线为 AD, $OP \subset$ 平面 PAD, 所以 $OP \perp$ 平面 ABCD,
 由于 $OB \subset$ 平面 ABCD, 所以 $OP \perp OB$; 在菱形 ABCD 中, $\angle BAD = 60^\circ$, 所以三角形 ABD 是等边三角形, 所以 $OB \perp AD$, 故 OA, OB, OP 两两相互垂直, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

由此分别以 OA, OB, OP 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 如下图所示,



$$A(1,0,0), B(0,\sqrt{3},0), C(-2,\sqrt{3},0), D(-1,0,0)$$

$$\because OP = \sqrt{5-1} = 2, \therefore P(0,0,2), \overrightarrow{AP} = (-1,0,2),$$

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{DP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{PC} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right) \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{DM} \rangle = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{27}{16} + \frac{1}{4}}} = \frac{6\sqrt{7}}{35},$$

所以异面直线 AP 与 DM 所成角的余弦值 $\frac{6\sqrt{7}}{35}$; 7 分

$$(2) \overrightarrow{DM} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{DB} = (1, \sqrt{3}, 0),$$

$$\text{设平面 } BDM \text{ 的法向量为 } \vec{n} = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DM} = -\frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{4}y + \frac{1}{2}z = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$$

故取 $x = -6$, 则可得 $\vec{n} = (-6, 2\sqrt{3}, -15)$, 9 分

假设在棱 PB 上存在点 N , 设 $\frac{PN}{PB} = \lambda$, 则 $\overrightarrow{PN} = \lambda \overrightarrow{PB}$,

$$\therefore \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AP} + \lambda \overrightarrow{PB} = (-1, 0, 2) + \lambda(0, \sqrt{3}, -2) = (-1, \sqrt{3}\lambda, 2 - 2\lambda)$$

若 $AN \parallel$ 平面 BDM , 则 $\overrightarrow{AN} \cdot \vec{n} = 6 + 6\lambda - 15(2 - 2\lambda) = -24 + 36\lambda = 0$,

解得 $\lambda = \frac{2}{3}$, 11 分

所以在棱 PB 上存在点 N , 使得 $AN \parallel$ 平面 BDM 且 $\frac{PN}{PB} = \frac{2}{3}$ 12 分

20. 解: (1) 由题意得 $a = 2$, 设 $|PF_1|, |PF_2|$ 的长分别为 m, n , $m + n = 2a = 4$, 则

$$\cos \angle F_1PF_2 = \frac{m^2 + n^2 - 4c^2}{2mn} = \frac{(m+n)^2 - 4c^2 - 2mn}{2mn} = \frac{2b^2}{mn} - 1 \geq \frac{2b^2}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2} - 1 = \frac{2b^2}{a^2} - 1$$

当且仅当 $m = n$ 时取等号, 3 分

$$\text{从而 } \frac{2b^2}{a^2} - 1 = \frac{1}{2}, \text{ 得 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{4}, \therefore b^2 = 3,$$

则椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 5 分

$$(2) \text{ 设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),$$

由题意, 根据椭圆的定义可得 $\triangle F_1MN$ 的周长为 $4a = 8$,

$$S_{\triangle NM F_1} = \frac{1}{2}(|F_1M| + |F_1N| + |NM|)r = 4r, \text{ 所以 } r = \frac{1}{4}S_{\triangle NM F_1}, \text{ 6 分}$$

设 l 的方程为 $x = ty + 1$, 联立椭圆方程 $3x^2 + 4y^2 = 12$,

可得 $(4+3t^2)y^2+6ty-9=0$, $y_1+y_2=-\frac{6t}{4+3t^2}$, $y_1y_2=-\frac{9}{4+3t^2}$,

$$S_{\triangle NMF_1} = S_{\triangle F_1F_2M} + S_{\triangle F_1F_2N} = \frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot |y_2| + \frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot |y_1| = \frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot |y_2 - y_1| = \frac{1}{2}|F_1F_2| \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{\left(-\frac{6t}{4+3t^2}\right)^2 - 4\left(-\frac{9}{4+3t^2}\right)} = \frac{12\sqrt{t^2+1}}{4+3t^2},$$

所以 $r = \frac{1}{4}S_{\triangle NMF_1} = \frac{3\sqrt{t^2+1}}{4+3t^2}$, 10 分

令 $\sqrt{t^2+1} = k$, 则 $k \geq 1$, $r = \frac{3k}{3k^2+1} = \frac{3}{3k+\frac{1}{k}}$,

由函数 $f(x) = 3x + \frac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $3k + \frac{1}{k} \geq 4$,

所以 $0 < \frac{3}{3k+\frac{1}{k}} \leq \frac{3}{4}$, 即 $0 < r \leq \frac{3}{4}$

故 $0 < r \leq \frac{3}{4}$ 12 分

21. 解: (1) $f(x) = xe^x - e$, $\therefore f'(x) = (1+x)e^x$, 1 分

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$.

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 3 分

所以函数 $f(x)$ 有最小值 $f_{\min}(x) = f(-1) = -e^{-1} - e$ 4 分

(2 由函数 $g(x)$ 有且仅有两个不同的零点, 且易知 $g(1) = 0$,

当 $k \leq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 是增函数, $g(x)$ 有唯一的零点, 与已知矛盾; 5 分

当 $k > 0$ 时, $g'(x) = (1+x)e^x - \frac{k}{x} = \frac{x(1+x)e^x - k}{x}$,

令 $h(x) = x(1+x)e^x - k$, ($x > 0$), 则 $h'(x) = (1+3x+x^2)e^x > 0$, 所以 $h(x)$ 是增函数,

又 $h(0) = -k < 0$, $h(k) = k(1+k)e^k - k > k - k = 0$,

故存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使 $h(x_0) = x_0(1+x_0)e^{x_0} - k = 0$, 即 $k = x_0(1+x_0)e^{x_0}$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0$, 所以 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, 所以 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

所以函数 $g(x)$ 有最小值，且

$$g(x)_{\min} = g(x_0) = x_0 e^{x_0} - k \ln x_0 - e = x_0 e^{x_0} - x_0 (1 + x_0) e^{x_0} \ln x_0 - e,$$

$$\text{令 } t(x) = x e^x - e - x(1+x) e^x \ln x, (x > 0), \text{ 则 } t'(x) = -(1+3x+x^2) e^x \ln x,$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $t'(x) > 0$, $t(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $t'(x) < 0$, $t(x)$ 单调递减,

$$\text{所以 } t(x)_{\max} = t(1) = 0. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

当 $x_0 \in (0, 1)$ 时, 有 $t(x_0) < t(1) = 0$, 所以 $g(x)_{\min} = g(x_0) < 0$,

又 $x \rightarrow 0_+, g(x) \rightarrow +\infty$, 所以存在 $x_1 \in (0, x_0)$ 使 $g(x_1) = 0$, 又 $g(1) = 0$,

故 $g(x)$ 有且仅有两个不同的零点, 此时 $k = x_0(1+x_0)e^{x_0} \in (0, 2e)$; $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

当 $x_0 = 1$ 时, 此时 $k = 2e$, $g(x)$ 有唯一的零点 1; $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

当 $x_0 \in (1, +\infty)$ 时, 有 $t(x_0) < t(1) = 0$, 所以 $g(x)_{\min} = g(x_0) < 0$,

又 $x \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow +\infty$, 所以存在 $x_2 \in (x_0, +\infty)$ 使 $g(x_2) = 0$, 又 $g(1) = 0$,

故 $g(x)$ 有且仅有两个不同的零点, 此时 $k = x_0(1+x_0)e^{x_0} \in (2e, +\infty)$;

综上所述, $k \in (0, 2e) \cup (2e, +\infty)$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 解 (1) 由 M 的参数方程可得 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$,

$$\text{即 } x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3, \therefore \rho^2 - 2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta = 3 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

由题设知: l_1 为 $y = \tan \alpha \cdot x$, 故 l_1 的极坐标方程为 $\theta = \alpha, (\rho \in \mathbb{R})$,

又 $l_2 \perp l_1$, $\therefore l_2$ 的极坐标方程为 $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}, (\rho \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}))$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$(2) \text{ 记 } \rho_1 = |OA|, \rho_2 = |OB|, \rho_3 = |OC|, \rho_4 = |OD|,$$

$$\text{联立 } l_1 \text{ 与 } M \text{ 得 } \rho^2 - 2\rho(\cos \alpha + \sin \alpha) - 3 = 0$$

$$\therefore \rho_1 + \rho_3 = 2(\cos \alpha + \sin \alpha), \rho_1 \rho_3 = -3$$

同理联立 l_2 与 M 得

$$\rho_2 + \rho_4 = 2[\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})] = 2(\cos \alpha - \sin \alpha), \rho_2 \rho_4 = -3 \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 &= 2(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2) \\ &= 2\{[(\rho_1 + \rho_3)^2 - 2\rho_1\rho_3] + [(\rho_2 + \rho_4)^2 - 2\rho_2\rho_4]\} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \\ &= 2 \times 20 = 40 \end{aligned}$$

23. 解 (1) 由 $f(1)=1$ 得: $a+b+c=1$,

$$\therefore 3(a+b+c) = \left[(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \right] (1^2 + 1^2 + 1^2) = 3, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{由柯西不等式得: } 3 = \left[(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \right] (1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时等号成立,

$$\text{所以 } \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 } f(x) \geq 2ax + b \text{ 得: } ax^2 + (b-2a)x + (c-b) \geq 0,$$

$$\text{由题知: } \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = (b-2a)^2 - 4a(c-b) \leq 0 \end{cases}, \text{ 则 } b^2 \leq 4ac - 4a^2,$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2 + c^2} \leq \frac{4ac - 4a^2}{a^2 + c^2} = \frac{\frac{4c}{a} - 4}{1 + \frac{c^2}{a^2}} = \frac{4\left(\frac{c}{a} - 1\right)}{\left(\frac{c}{a} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{c}{a} - 1\right) + 2}; \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore 4ac - 4a^2 = 4a(c-a) \geq b^2 \geq 0, \text{ 又 } a > 0, \therefore c \geq a, \text{ 则 } \frac{c}{a} - 1 \geq 0, \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{令 } t = \frac{c}{a} - 1, \text{ 则 } t \geq 0, \text{ 设 } g(t) = \frac{4t}{t^2 + 2t + 2} (t \geq 0),$$

$$\text{当 } t=0 \text{ 时, } g(t)=0; \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{当 } t > 0 \text{ 时, } g(t) = \frac{4}{t + \frac{2}{t} + 2} \leq \frac{4}{2\sqrt{t \cdot \frac{2}{t}} + 2} = \frac{2}{\sqrt{2} + 1} = 2\sqrt{2} - 2$$

(当且仅当 $t = \sqrt{2}$ 时等号成立),

$$\therefore \frac{b^2}{a^2 + c^2} \text{ 的最大值为 } 2\sqrt{2} - 2. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线