

2022—2023 学年度高三年级第一次调研测试

数学试题

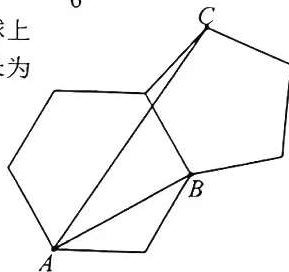
2023.01

注意事项:

1. 考试时间 120 分钟, 试卷满分 150 分。
2. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 请用 2B 铅笔和 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上指定区域内作答。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 若非空且互不相等的集合 M, N, P 满足: $M \cap N = M, N \cup P = P$, 则 $M \cup P =$
A. M B. N C. P D. $\emptyset$
2. 已知 $i^2 = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 则 $a + b$ 的值为
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
3. 设 $p: 4x - 3 < 1; q: x - (2a + 1) < 0$, 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则
A. $a > 0$ B. $a > 1$ C. $a \geq 0$ D. $a \geq 1$
4. 已知点 Q 在圆 $C: x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$ 上, 点 P 在直线 $y = x$ 上, 则 PQ 的最小值为
A. $\sqrt{2} - 1$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2
5. 某次足球赛共 8 支球队参加, 分三个阶段进行.
(1) 小组赛: 经抽签分成甲、乙两组, 每组 4 队进行单循环比赛, 以积分和净胜球数取前两名;
(2) 半决赛: 甲组第一名与乙组第二名, 乙组第一名与甲组第二名进行主、客场交叉淘汰赛 (每两队主、客场各赛 1 场), 决出胜者;
(3) 决赛: 两个胜队参加, 比赛 1 场, 决出胜负.
则全部赛程共需比赛的场数为
A. 15 B. 16 C. 17 D. 18
6. 若 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $[-t, t]$ 上单调递增, 则实数 t 的取值范围为
A. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ B. $(0, \frac{\pi}{3}]$ C. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ D. $(0, \frac{\pi}{6}]$
7. 足球是由 12 个正五边形和 20 个正六边形组成的. 如图, 将足球上的一个正六边形和它相邻的正五边形展开放平, 若正多边形边长为 a , A, B, C 分别为正多边形的顶点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$
A. $(3 + \sqrt{3} \cos 18^\circ) a^2$ B. $(\sqrt{3} + \cos 18^\circ) a^2$
C. $(3 + \sqrt{2} \cos 18^\circ) a^2$ D. $(3\sqrt{3} + 3 \cos 18^\circ) a^2$



数学试题 第 1 页 (共 4 页)

8. 在某次数学节上, 甲、乙、丙、丁四位同学分别写下了一个命题:

甲: $\ln 3 < \sqrt{3} \ln 2$; 乙: $\ln \pi < \sqrt{\frac{\pi}{e}}$; 丙: $2^{\sqrt{12}} < 12$; 丁: $3e \ln 2 > 4\sqrt{2}$.

所写为真命题的是

- A. 甲和乙 B. 甲和丙 C. 丙和丁 D. 甲和丁

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 连续抛掷一枚骰子 2 次, 记事件 A 表示“2 次结果中正面向上的点数之和为奇数”, 事件 B 表示“2 次结果中至少一次正面向上的点数为偶数”, 则

- A. 事件 A 与事件 B 不互斥 B. 事件 A 与事件 B 相互独立

C. $P(AB) = \frac{3}{4}$ D. $P(A|B) = \frac{2}{3}$

10. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 3$, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心为 M , 则

- A. $C_1D_1 \parallel$ 平面 ABM

B. 向量 $\overrightarrow{AM}$ 在向量 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

C. 棱锥 $M-ABCD$ 的内切球的半径为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

D. 直线 AM 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{11}}{11}$

11. 公元前 6 世纪, 古希腊的毕达哥拉斯学派把 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$) 称为黄金数. 离心率等于黄金数的倒数的双曲线称为黄金双曲线. 若黄金双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 虚轴的上端点为 B , 左焦点为 F , 离心率为 e , 则

- A. $a^2e = 1$ B. $\overrightarrow{A_2B} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$

C. 顶点到渐近线的距离为 e D. $\triangle A_2FB$ 的外接圆的面积为 $\frac{2+\sqrt{5}}{4}\pi$

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(2x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [0, 1]$ 时,

$f(x) = a^x + b$. 若 $f(0) + f(3) = -1$, 则

- A. $b = -2$ B. $f(2023) = -1$

C. $f(x)$ 为偶函数 D. $f(x)$ 的图象关于 $(\frac{1}{2}, 0)$ 对称

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 $(1-2x)^5(x+2) = a_0 + a_1x + \cdots + a_6x^6$, 则 $a_3 =$ _____.

14. 某学校组织 1200 名学生进行“防疫知识测试”. 测试后统计分析如下: 学生的平均成绩为 $\bar{x} = 80$, 方差为 $s^2 = 25$. 学校要对成绩不低于 90 分的学生进行表彰. 假设学生的测试成绩 X 近似服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ (其中 μ 近似为平均数 $\bar{x}$, σ^2 近似为方差 s^2), 则估计获表彰的学生人数为 _____. (四舍五入, 保留整数)

参考数据: 随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$,

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$.

数学试题 第 2 页 (共 4 页)

15. 已知抛物线 $y^2 = 2x$ 与过点 $T(6,0)$ 的直线相交于 A, B 两点, 且 $OB \perp AB$ (O 为坐标原点), 则 $\triangle OAB$ 的面积为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + 1, & x \leq 1, \\ \ln(x-1), & x > 1, \end{cases}$ 则函数 $F(x) = f[f(x)] - 2f(x) - \frac{1}{2}$ 的零点个数为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a \cos B + b \cos A = 2c \cos C$.

(1) 求角 C ;

(2) 若 $c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围.

18. (12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_3 = 14$, $S_6 = 126$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

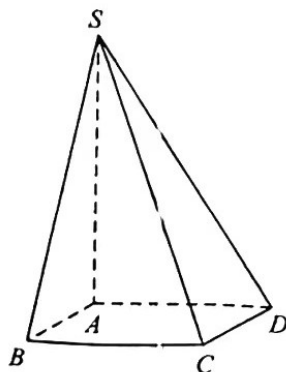
(2) 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n = 4^n - 1$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

19. (12 分)

如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 侧面 $SAD \perp$ 底面 $ABCD$, $SA \perp AD$, 且四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $AB = 1$, $BC = 2$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $SA = 3$.

(1) 求二面角 $S-CD-A$ 的大小;

(2) 点 P 在线段 SD 上且满足 $\overrightarrow{SP} = \lambda \overrightarrow{SD}$, 试确定 λ 的值, 使得直线 BP 与面 PCD 所成角最大



20. (12分)

设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 若

椭圆 E 上的点到直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 的最小距离为 $3 - \sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 过 F_1 作直线交椭圆 E 于 A, B 两点, 设直线 AF_2, BF_2 与直线 l 分别交于 C, D 两点, 线段 AB, CD 的中点分别为 M, N , O 为坐标原点, 若 M, O, N 三点共线, 求直线 AB 的方程.

21. (12分)

第 22 届世界杯于 2022 年 11 月 21 日到 12 月 18 日在卡塔尔举办. 在决赛中, 阿根廷队通过点球战胜法国队获得冠军.

(1) 扑点球的难度一般比较大, 假设罚点球的球员会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向射门, 门将也会等可能地随机选择球门的左、

中、右三个方向来扑点球, 而且门将即使方向判断正确也有 $\frac{2}{3}$ 的可能性扑不到球. 不考虑其它因素, 在一次点球大战中, 求门将在前三次扑到点球的个数 X 的分布列和期望;

(2) 好成绩的取得离不开平时的努力训练, 甲、乙、丙三名前锋队员在某次传接球的训练中, 球从甲脚下开始, 等可能地随机传向另外 2 人中的 1 人, 接球者接到球后再等可能地随机传向另外 2 人中的 1 人, 如此不停地传下去, 假设传出的球都能接住. 记第 n 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_n , 易知 $p_1 = 1, p_2 = 0$.

① 试证明: $\{p_n - \frac{1}{3}\}$ 为等比数列;

② 设第 n 次传球之前球在乙脚下的概率为 q_n , 比较 p_{10} 与 q_{10} 的大小.



22. (12分)

已知函数 $f(x) = ae^x + \cos x + \frac{1}{2}x^2$, 其中 a 为实数, e 是自然对数的底数.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求曲线 $f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程;

(2) 若 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有两个极值点, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线