准考证号

姓名

考场

考点

绝密★启用前

2023年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学试题卷

（银川一中第二次模拟考试）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．作答时，务必将答案写在答题卡上。写在本试卷及草稿纸上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，满分60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知复数z在复平面内对应的点为$(1,2)$，$\overline{z}$是z的共轭复数，则$\dfrac{z}{\overline{z}}=$

A．$-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　　B．$-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　　C．$\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　　D．$\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$

2．已知集合$A=\{1,2,3\}$，$B=\{x|x^2-x+m=0\}$，若$A\cap B=\{2\}$，则$B=$

A．$\{2,1\}$　　B．$\{2,4\}$　　C．$\{2,3\}$　　D．$\{2,-1\}$

3．已知命题P的否定为"$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+1\le 1$"，则下列说法中正确的是

A．命题P为"$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+1>1$"且为真命题

B．命题P为"$\forall x\notin\mathbf{R}$，$x^2+1>1$"且为假命题

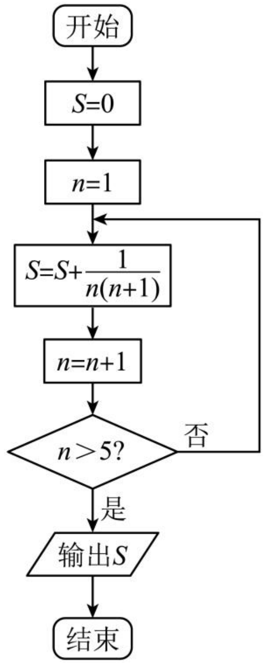
C．命题P为"$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+1>1$"且为假命题

D．命题P为"$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+1\ge 1$"且为真命题

4．世界数学三大猜想："费马猜想"、"四色猜想"、"哥德巴赫猜想"，其中"四色猜想"和"费马猜想"已经分别在1976年和1994年荣升为"四色定理"和"费马大定理"．281年过去了，哥德巴赫猜想仍未解决，目前最好的成果"1＋2"由我国数学家陈景润在1966年取得．哥德巴赫猜想描述为：任何不小于4的偶数，都可以写成两个质数之和．在不超过17的质数中，随机选取两个不同的数，其和为奇数的概率为

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{2}{7}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{2}{5}$

5．执行如图所示程序框图，则输出的 S 的值是



A．$\frac{4}{5}$

B．$\frac{5}{6}$

C．$\frac{6}{7}$

D．$\frac{7}{8}$

6．下列函数中，定义域和值域不相同的是

A．$y=-x$　　B．$y=\sqrt{x}$

C．$y=\frac{2}{x}$　　D．$y=\begin{cases}x-2, x\le 0\\ x+2, x>0\end{cases}$

7．已知向量 $\vec{a}=\left(2\cos 75^{\circ}, 2\sin 75^{\circ}\right)$，$\vec{b}=\left(\cos 15^{\circ}, -\sin 15^{\circ}\right)$，

且 $(2\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\lambda\vec{b})$，则实数 λ 的值为

A．8　　B．-8　　C．4　　D．-4

8．已知焦点在 x 轴上的双曲线，一条渐近线的倾斜角是另一条渐近线的倾斜角的 5 倍，则双曲线的离心率是

A．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．2　　C．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{2}$

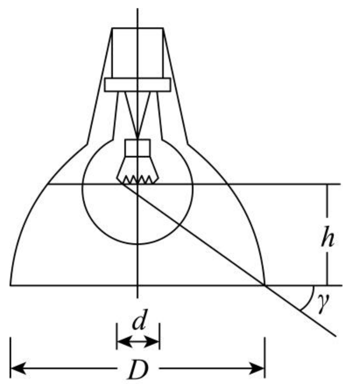
9．如图，生活中有很多球缺状的建筑．球被平面截下的部分叫做球缺，截面叫做球缺的底面，球缺的曲面部分叫做球冠，垂直于截面的直径被截后的线段叫做球缺的高．球冠面积公式为 $S=2\pi RH$，球缺的体积公式为 $V=\frac{1}{3}\pi\left(3R-H\right)H^2$，其中 R 为球的半径，H 为　球缺的高．现有一个球被一平面所截形成两个球缺，若两个球冠的面积之比为 $1:2$，则　这两个球缺的体积之比为

A．$\frac{1}{9}$　　B．$\frac{11}{20}$　　C．$\frac{7}{20}$　　D．$\frac{3}{10}$

10．已知关于 x 的方程 $x^2-kx+k+3=0$ 有两个正根，那么两个根的倒数和最小值是

A．-2　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{8}{9}$　　D．1

11．为了降低或消除白炽灯对眼睛造成的眩光，给光源加上一个不透光材料做的灯罩，可以起到十分显著的效果.某一灯罩的防止眩光范围，可用遮光角γ这一水平夹角来衡量.遮光角是指灯罩边沿和发光体边沿的连线与水平线所成的夹角，图中灯罩的遮光角用$\tan\gamma=\dfrac{2h}{D+d}$表示.若图中$D=106$，$d=14$，且$\dfrac{10\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma+1}=11$，则$h=$



A．44　　B．66　　C．88　　D．110

12．曲线$\Gamma:\left(\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{3}-1\right)\sqrt{x^2+y^2-9}=0$，要使直线$y=m\left(m\in\mathbf{R}\right)$与曲线$\Gamma$有四个不同的交点，则实数$m$的取值范围是

A．$\left(-3,-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},3\right)$　　B．$\left(-3,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},3\right)$

C．$\left(3,3\right)$　　D．$\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$

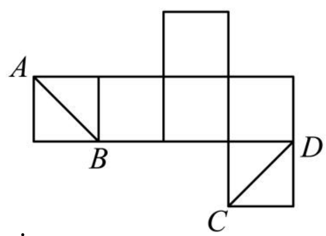
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．总体由编号为 01，02，…，19，20 的 20 个个体组成，利用下面的随机数表选取 6 个个体，选取方法是从随机数表第 1 行的第 5 列和第 6 列数字开始由左到右依次选取两个数字，则选出来的第 5 个个体的编号为______.

7816　6572　0802　6314　0702　4369　1128　0598

14．在等比数列$\{a_n\}$中，a_3、a_7是函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}x^3-4x^2+4x-1$的极值点，则$a_5=$_______.

15．如图是正方体的平面展开图，则在这个正方体中，异面直线AB与CD的夹角为__________.



16．若直线$y=k_1(x+1)-1$与曲线$y=\mathrm{e}^x$相切，直线$y=k_2(x+1)-1$与曲线$y=\ln x$相切，则k_1k_2的值为__________.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分

17．(12 分)

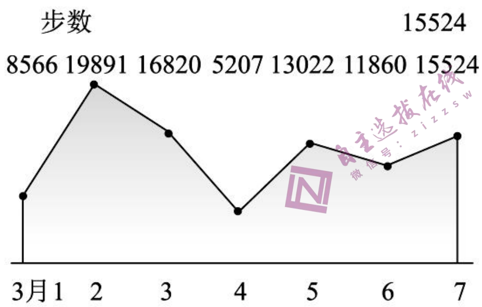
已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_4=9$，$S_3=15$．

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

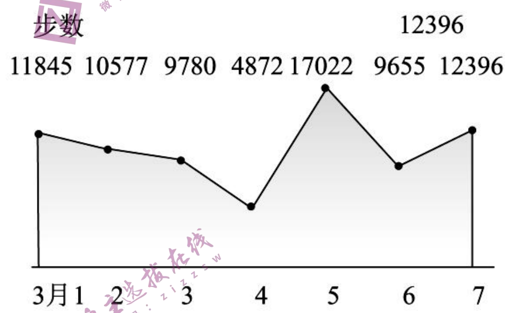
(2)若 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明：$T_n<\dfrac{1}{6}$．

18．(12 分)

某校工会开展健步走活动，要求教职工上传 3 月 1 日至 3 月 7 日的微信记步数信息，下图是职工甲和职工乙微信记步数情况：



职工甲

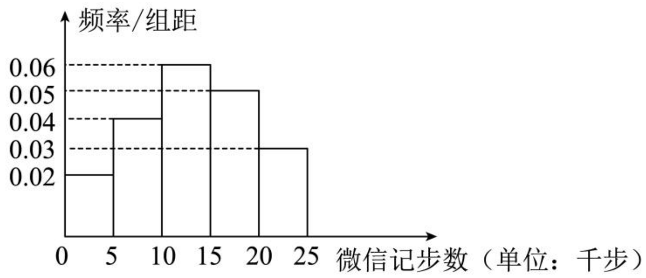


职工乙

(1)从 3 月 2 日至 3 月 7 日中任选一天，求这一天职工甲和职工乙微信记步数都不低于 10000 的概率；

(2)从 3 月 1 日至 3 月 7 日中任选两天，记职工乙在这两天中微信记步数不低于 10000 的天数为 X，求 X 的分布列及数学期望；

(3)下图是校工会根据 3 月 1 日至 3 月 7 日某一天的数据制作的全校 200 名教职工微信记步数的频率分布直方图．已知这一天甲和乙微信记步数在单位 200 名教职工中排名（按照从大到小排序）分别为第 68 和第 142，请指出这是根据哪一天的数据制作的频率分布直方图（不用说明理由）．



19．(12 分)

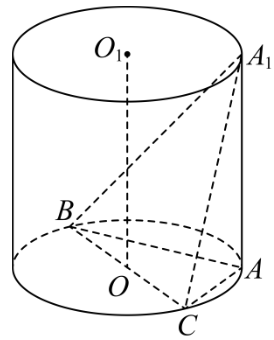
已知 O 为坐标原点，F 为抛物线 $C: y^2 = 2px(p>0)$ 的焦点，抛物线 C 过点 $M(6,-6)$.

(1)求抛物线 C 的标准方程；

(2)已知直线 l 与抛物线 C 交于 A，B 两点，且 $OA \perp OB$，证明：直线 l 过定点.

20．(12 分)

如图，线段 AA_1 是圆柱 OO_1 的母线，BC 是圆柱下底面 $\odot O$ 的直径.



(1)弦 AB 上是否存在点 D，使得 $O_1D \parallel$ 平面 A_1AC，请说明理由；

(2)若 $BC=2$，$\angle ABC = 30°$，点 A_1，A，B，C 都在半径为 $\sqrt{2}$ 的球面上，求二面角 $C-A_1B-A$ 的余弦值.

21．(12 分)

已知函数 $f(x) = a\int_1^{x+1} \frac{1}{t}dt + (x+1)^2 \left(x>-1\right)$.

（1）若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值，问是否存在实数 m，使得不等式 $m^2 + tm + e^2 - 14 \le f(x)$ 对任意 $x \in \left[e-1, e\right]$ 及 $t \in \left[-1, 1\right]$ 恒成立？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.$\left(e = 2.71828\cdots\right)$；

（2）若 $a=1$，设 $F(x) = f(x) - (x+1)^2 - x$.

①求证：当 $x>0$ 时，$F(x) < 0$；

②设 $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+(n+1)}\left(n \in N^*\right)$，求证：$a_n > \ln 2$

（二）**选考题：共 10 分.**请考生在第 22、23 两题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22．[选修 4－4：坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{\lambda}{t} \end{cases}$（$t$ 为参数，常数 $\lambda>0$），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的方程为 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=2$.

(1)写出 C 的极坐标方程和 l 的直角坐标方程；

(2)若直线 $\theta=\dfrac{\pi}{12}(\rho\in\mathbf{R})$ 和 C 相交于 A,B 两点，以 AB 为直径的圆与直线 l 相切，求 λ 的值.

23．[选修 4-5：不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|x+a|+|x+3a|$.

(1)当 $a=-1$ 时，求不等式 $f(x)<4$ 的解集；

(2)若 $f(x)$ 的最小值为 2，且 $(a-m)(a+m)=\dfrac{4}{n^2}$，求 $\dfrac{1}{m^2}+n^2$ 的最小值.