

## 江西省五市九校协作体 2023 届第二次联考 数学试题(理科)

命题：余江一中      严银斌      祝翠华

### 第 I 卷（选择题共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \mid |x| < 4, x \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{y \mid y^2 > 4\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $(-4, -2) \cup (2, 4)$     B.  $\{-3, 3\}$             C.  $(2, 4)$                 D.  $\{3\}$

2. 若复数  $z$  满足  $z(1+i) = 2i - 1$  ( $i$  为虚数单位), 则下列说法正确的是 ( )

- A.  $z$  的虚部为  $\frac{3}{2}i$     B.  $|z| = \frac{\sqrt{10}}{2}$     C.  $z + \bar{z} = 3$     D.  $z$  在复平面内对应的点在第二象限

3. 若  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ,  $\alpha$  是第三象限的角, 则  $\frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}} =$  ( )

- A. 2                      B.  $\frac{1}{2}$                       C. -2                      D.  $-\frac{1}{2}$

4. 天干地支纪年法源于中国, 中国自古便有十天干与十二地支. 十天干即: 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸; 十二地支即: 子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥. 天干地支纪年法是按顺序以一个天干和一个地支相配, 排列起来, 天干在前, 地支在后, 天干由“甲”起, 地支由“子”起, 比如第一年为“甲子”, 第二年为“乙丑”, 第三年为“丙寅”, ..., 以此类推, 排列到“癸酉”后, 天干回到“甲”重新开始, 即“甲戌”, “乙亥”, 之后地支回到“子”重新开始, 即“丙子”, ..., 以此类推, 2023 年是癸卯年, 请问: 在 100 年后的 2123 年为 ( )

- A. 癸未年              B. 辛丑年              C. 己亥年              D. 戊戌年

5. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $P$  在双曲线  $C$  的右支上, 且

$|PF_1| = 4|PF_2|$ , 双曲线  $C$  的一条渐近线方程为  $y = kx$ , 则  $k$  的最小值为 ( )

- A.  $\frac{4}{3}$                       B.  $-\frac{4}{3}$                       C.  $\frac{3}{4}$                       D.  $-\frac{3}{4}$

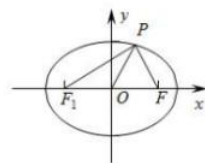
6. 中国空间站 (*China Space Station*) 的主体结构包括天和核心舱、问天实验舱和梦天实验舱. 2022 年 10 月 31 日 15: 37 分, 我国将“梦天实验舱”成功送上太空, 完成了最后一个关键部分的发射, “梦天实验舱”也和“天和核心舱”按照计划成功对接, 成为“T”字形架构, 我国成功将中国空间站建设完毕. 2023 年, 中国空间站将正式进入运营阶段. 假设空间站要安排甲、乙等 6 名航天员开展实验, 三舱中每个舱至少一人至多三人, 则不同的安排方法有 ( )

- A. 450 种              B. 72 种              C. 90 种              D. 360 种

江西省五市九校协作体高三第二次联

7. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点为  $F$ , 点  $P$  是椭圆  $C$  上的一个动点,  $|PF|$  的最小值为  $\sqrt{3}-1$ , 且存在点  $P$  使得  $\triangle OPF$  (点  $O$  为坐标原点) 为正三角形, 则椭圆  $C$  的焦距为 ( )

- A. 2                      B.  $2\sqrt{2}$                       C.  $2\sqrt{3}$                       D. 4

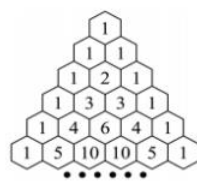


8. 关于曲线  $C: (x-m)^2 + (y-m)^2 = (m-1)^2$ , 下列说法正确的是 ( )

- A. 曲线  $C$  可能经过点  $(0,2)$                       B. 若  $m > 1$ , 过原点与曲线  $C$  相切的直线有两条  
C. 若  $m=1$ , 曲线  $C$  表示两条直线                      D. 若  $m=2$ , 则直线  $y=x$  被曲线  $C$  截得弦长等于  $2\sqrt{2}$

9. 已知函数  $f(x) = 2\sin x + \sin|x| + |\sin x|$ , 则下列说法中正确的是 ( )

- A.  $f(x)$  是偶函数  
B.  $f(x)$  的图像关于直线  $x = \frac{\pi}{2}$  对称  
C.  $f(x)$  的值域为  $[-2,4]$   
D.  $f(x)$  在  $[-2\pi, 2\pi]$  上有 5 个零点



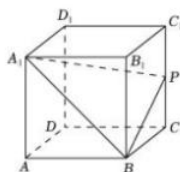
第 10 小题图

10. 如图为“杨辉三角”示意图, 已知每一行的数字之和构成的数列为等比数列且记该数列前  $n$  项和为  $S_n$ , 设  $b_n = \sqrt{5 \log_2(S_n + 1)} - 1$ , 将数列  $\{b_n\}$  中的整数项依次取出组成新的数列记为  $\{c_n\}$ , 则  $c_{2023}$  的值为 ( )

- A. 5052                      B. 5057                      C. 5058                      D. 5063

11. 在直四棱柱中  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $AB = AD = AA_1 = 2$ ,  $P$  为  $CC_1$  中点, 点  $Q$  满足  $\overrightarrow{DQ} = \lambda \overrightarrow{DC} + \mu \overrightarrow{DD_1}$ , ( $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\mu \in [0, 1]$ ). 下列结论不正确的是 ( )

- A. 若  $\lambda + \mu = 1$ , 则四面体  $A_1BPQ$  的体积为定值  
B. 若  $AQ \parallel$  平面  $A_1BP$ , 则  $AQ$  的最小值为  $\sqrt{5}$   
C. 若  $\triangle A_1BQ$  的外心为  $M$ , 则  $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{A_1M}$  为定值 2  
D. 若  $A_1Q = \sqrt{7}$ , 则点  $Q$  的轨迹长度为  $\frac{2\pi}{3}$



12. 已知  $a > b$ ,  $c > d$ ,  $\frac{e^a}{a+1} = \frac{e^b}{b+1} = 1.01$ ,  $(1-c)e^c = (1-d)e^d = 0.99$  则有 ( )

- A.  $a+b < 0$                       B.  $c+d > 0$                       C.  $a+d > 0$                       D.  $b+c > 0$

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分。将答案填在题中的横线上）

13. 已知非零向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$ ,  $(\vec{a}+\vec{b}) \perp \vec{a}$ , 则向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角是 \_\_\_\_\_.

14. 已知  $(1+x)(1-2x)^6 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_7(x-1)^7$ , 则  $a_2 =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知实数  $a, b$  满足  $b=1+a, b \in (0, 1)$ , 则  $\frac{2023}{b} - \frac{a+1}{2023a}$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

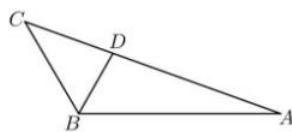
16. 已知  $a \in \mathbf{R}$ . 设函数  $f(x) = \begin{cases} 1+a-ax, & -1 \leq x \leq 1 \\ x-a \ln x, & x > 1 \end{cases}$  若关于的不等式  $f(f(x)) \geq 0$  恒成立, 则  $a$  的取值范围  
为 \_\_\_\_\_.

三、解答题：（共70分解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17. （本小题满分12分）

已知  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $BD$  为  $\angle ABC$  的角平分线.

(1) 求证:  $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{CB}$ ; (2) 若  $BD=2$  且  $c=2a=6$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

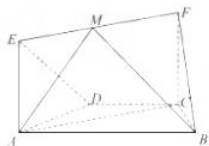


18. （本小题满分12分）

如图, 在梯形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $\angle BCD = \frac{2\pi}{3}$ , 四边形  $ACFE$  为矩形, 且  $CF \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AD=CD=BC=CF=l$ .

(1) 求证:  $EF \perp$  平面  $BCF$ ;

(2) 点  $M$  在线段  $EF$  上运动, 当点  $M$  在什么位置时, 平面  $MAB$  与平面  $FCB$  所成锐二面角最大? 并求此时锐二面角的余弦值.



19. （本小题满分12分）

某企业对生产设备进行优化升级, 升级后的设备控制系统由  $2k-1$  ( $k \in \mathbf{N}^*$ ) 个相同的元件组成, 每个元件正常工作的概率均为  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 各元件之间相互独立. 当控制系统有不少于  $k$  个元件正常工作时, 设备正常运行, 否则设备停止运行, 记设备正常运行的概率为  $p_k$  (例如:  $p_2$  表示控制系统由3个元件组成时设备正常运行的概率;  $p_3$  表示控制系统由5个元件组成时设备正常运行的概率).

(1) 若  $p = \frac{2}{3}$ , 当  $k=2$  时, 求控制系统中正常工作的元件个数  $X$  的分布列和数学期望, 并求  $p_3$ ;

(2) 已知设备升级前, 单位时间的产量为  $a$  件, 每件产品的利润为1元, 设备升级后, 在正常运行状态下, 单位时间的产量是原来的4倍, 且出现了高端产品, 每件产品成为高端产品的概率为  $\frac{1}{4}$ , 每件高端产品的利润是2元. 记设备升级后单位时间内的利润为  $Y$  (单位: 元).

江西省五市九校协作体高三第二次联

(i) 请用  $p_k$  表示  $E(Y)$ ;

(ii) 设备升级后, 在确保控制系统中元件总数为奇数的前提下, 分析该设备能否通过增加控制系统中元件的个数来提高利润.

20. (本小题满分 12 分)

过坐标原点  $O$  作圆  $C: (x+2)^2 + y^2 = 3$  的两条切线, 设切点为  $P, Q$ , 直线  $PQ$  恰为抛物线  $E: y^2 = 2px (p >$

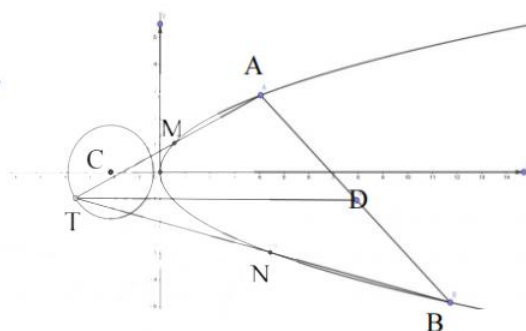
0) 的准线.

(1) 求抛物线  $E$  的标准方程;

(2) 设点  $T$  是圆  $C$  的动点, 抛物线  $E$  上四点  $A, B, M, N$  满足:  $\overrightarrow{TA} = 2\overrightarrow{TM}, \overrightarrow{TB} = 2\overrightarrow{TN}$  设  $AB$  中点为  $D$ .

(i) 证明:  $TD$  垂直于  $y$  轴;

(ii) 设  $\triangle TAB$  面积为  $S$ , 求  $S$  的最大值.



21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \ln x - \frac{a}{x+1}$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 若函数  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$ , 且  $ke^{f(x_1)+f(x_2)-4} + \ln \frac{k}{x_1+x_2-2} \geq 0$  恒成立, 求实数  $k$  的最小值.

**选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.**

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (本小题满分 10 分)

以直角坐标系的原点  $O$  为极点, 以  $x$  轴正半轴为极轴, 且两个坐标系取相等的长度单位, 已知直线  $l$

的参数方程为  $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$  ( $t$  为参数,  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ), 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho \cos^2 \theta = 8 \sin \theta$ .

(1) 求曲线  $C$  的直角坐标方程;

(2) 设直线  $l$  与曲线  $C$  相交于  $A, B$  两点, 当  $\alpha$  变化时, 求  $|AB|$  的最小值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (本小题满分 10 分)

已知  $a, b, c$  均为正实数, 且  $abc = 1$ . 证明:

$$(1) a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; \quad (2) \frac{b^6}{a^3+1} + \frac{c^6}{b^3+1} + \frac{a^6}{c^3+1} \geq \frac{3}{2}.$$

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

