

6. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别为 A_1D_1, AB, C_1D_1 的中点, 则直线 A_1G 与 EF 所成角的余弦值为
- A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{30}}{15}$ C. $\frac{\sqrt{30}}{30}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$
7. 已知首项为 -1 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{a_n a_{n+1}}{2^n} + 1 = 0$, 则下列说法正确的是
- A. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列 B. $a_8 = 128$
C. $S_{10} = -33$ D. S_{2n-1} 为定值
8. 已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = \frac{BB_1}{2}$, 点 E 在线段 CC_1 上, $\frac{CE}{CC_1} = \lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$, 平面 α 过线段 AA_1 的中点以及点 B_1, E . 若平面 α 截长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所得截面为平行四边形, 则实数 λ 的取值范围为
- A. $[0, 1]$ B. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ C. $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ D. $[\frac{1}{2}, 1]$
9. 函数 $f(x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3}) + \frac{2}{3}$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$ 上的所有零点之和为
- A. $\frac{5\pi}{3}$ B. $\frac{10\pi}{3}$ C. 5π D. $\frac{20\pi}{3}$
10. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 不过原点且斜率为 2 的直线 l 与抛物线 C 交于 M, N 两点, 若 $\angle MFN = 90^\circ$, 则 $|MF| \cdot |NF| =$
- A. 60 B. 50 C. 40 D. 25
11. 已知正四面体 $ABCD$ 可以在圆锥 SO 内绕自身的中心任意旋转, 若该正四面体棱长的最大值为 $2\sqrt{2}$, 且圆锥的高为 $3\sqrt{3}$, 则圆锥 SO 的表面积为
- A. 27π B. 30π C. 32π D. 36π
12. 若关于 x 的方程 $ae^{x+a-1} = -|x| + 1$ 有且仅有两个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围为
- A. $[0, \frac{1}{e}) \cup \{-1\}$ B. $[0, e) \cup \{-1\}$
C. $[0, 1) \cup \{-1\}$ D. $[0, e)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \leq y + 1, \\ x + 2y \leq 4, \\ x + y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 3x + 2y$ 的最小值为 _____.
14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{17} = 51, a_{12} = 0$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差为 _____.
15. 若不等式 $2^{x+1} - 2 < ax$ 的解集中有且仅有两个正整数, 则实数 a 的取值范围是 _____.
16. 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{m} = 1 (m > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 渐近线方程为 $\sqrt{7}x \pm 3y = 0$, 点 A 在圆 $C_2: x^2 + y^2 = 16$ 上, 若 $\overrightarrow{F_1A} = \overrightarrow{AB}$, 且点 B 是双曲线 C_1 右支上的点, 则 $\angle BF_2F_1$ 的正切值为 _____.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , BC 边上的高为 $\frac{1}{2}a$.

(I) 若 $\tan A = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 求 $\sin B \sin C$ 的值;

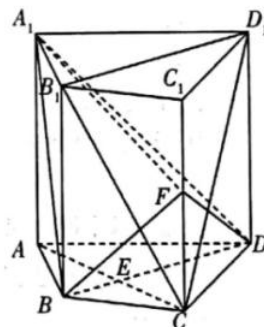
(II) 求 $\frac{b}{c} + \frac{c}{b}$ 的最值.

18. (12 分)

如图所示, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的侧棱与底面垂直, $AC = 2\sqrt{2}$, $AA_1 = AD = DC = 2$, AC, BD 交于点 E , 且 E, F 分别为 AC, CC_1 的中点, $BE = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(I) 求证: 平面 $B_1CD_1 \parallel$ 平面 A_1BD ;

(II) 求三棱锥 $F - A_1BD$ 的体积.



19. (12 分)

动车和 BRT(快速公交) 的出现, 方便了人们的出行, 并且带动了我国经济的巨大发展, 根据统计, 在 2020 年从甲市到乙市乘坐动车和 BRT 的人数众多, 为了调查乘客对这两种出行方式的满意度, 研究人员随机抽取了 500 名乘客进行调查, 所得情况统计如下表所示:

满意程度	30 岁以下		30~50 岁		50 岁及 50 岁以上	
	乘坐动车	乘坐 BRT	乘坐动车	乘坐 BRT	乘坐动车	乘坐 BRT
满意	50	5	100	10	100	20
一般	20	15	40	20	20	25
不满意	5	0	20	10	20	20

(I) 若从样本中任取 1 人, 求抽取的乘客年龄在 30 岁及 30 岁以上的概率;

(II) 记满意为 10 分, 一般为 5 分, 不满意为 0 分, 根据表中数据, 计算样本中 30~50 岁乘坐动车乘客满意程度的平均分以及方差;

(III) 若从样本中 30~50 岁的满意程度一般的乘客中按照乘车类型用分层抽样的方法抽取 6 人, 再从这 6 人中随机挑选 3 人咨询改进措施, 求这 3 人中至少有 2 人乘坐 BRT 的概率.

20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$, 四个顶点围成的四边形的面积为 4, 过右焦点 F 且不与坐标轴垂直的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 且 $A(x_0, y_0)$ 满足 $\vec{MA} = \vec{AN}$.

(I) 证明: $x_0 > 0$;

(II) 过点 A 且与 l 垂直的直线 l' 过点 $P(x_p, 0), Q(0, y_q)$, 若 $\triangle OPQ$ (点 O 为坐标原点) 的面积与 $\triangle PAF$ 的面积相等, 求直线 l 的方程.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln x - mx (m \in \mathbf{R})$.

(I) 若 $m > 0$, 且 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上的最大值为 -1 , 求 m 的值;

(II) 若关于 x 的不等式 $xf(x) + m \leq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 求 m 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = m - 6t, \\ y = 4t \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为

极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho \sqrt{4\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 2$, 其中 $\theta \in [0, \pi]$.

(I) 写出直线 l 的极坐标方程以及曲线 C 的参数方程;

(II) 已知点 P, Q 分别在曲线 C 以及直线 l 上, 且 $|PQ|$ 的最小值为 $2\sqrt{13}$, 求 m 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |2x + 4| + |x - 3|$.

(I) 求不等式 $f(x) > 6$ 的解集;

(II) 已知函数 $g(x) = f(x) - |x + 2|$ 的最小值为 A , 若正数 m, n 满足 $3m + 4n = A$, 求

$\frac{1}{3m+1} + \frac{1}{2n+1}$ 的最小值.

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



 微信搜一搜

 自主选拔在线