数　学

命题人：　　　　审题人：

座位号＿＿＿＿　考生号＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第Ⅰ卷时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第Ⅱ卷时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-4x-5\leqslant 0\}$，$B=\{x|\log_2 x<2\}$，则 $A\cap B=$

A. $[-1,4)$　　B. $[-1,4]$　　C. $[-1,5]$　　D. $(0,4)$

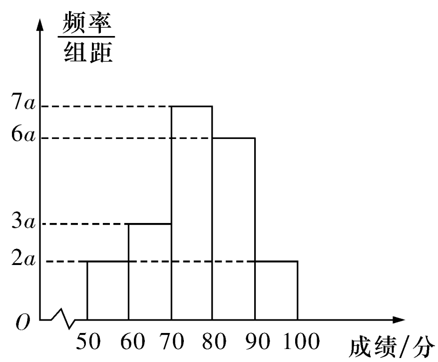
2. 已知数列 $\{a_n\}$，若 $a_1+a_{2n-1}=4n-6$，则 $a_7=$

A. 9　　B. 11　　C. 13　　D. 15

3. 1614年纳皮尔在研究天文学的过程中为了简化计算而发明对数；1637年笛卡尔开始使用指数运算；1770年，欧拉发现了指数与对数的互逆关系，指出：对数源于指数，对数的发明先于指数，称为数学史上的珍闻．若 $2^x=\dfrac{5}{2}$，$\lg 2\approx 0.3010$，则 x 的值约为

A. 1.322　　B. 1.410　　C. 1.507　　D. 1.669

4. 某校1000名学生参加环保知识竞赛，随机抽取了20名学生的考试成绩(单位：分)，成绩的频率分布直方图如图所示，则下列说法正确的是



A. 频率分布直方图中 a 的值为0.004

B. 估计这20名学生考试成绩的第60百分位数为75

C. 估计这20名学生考试成绩的众数为80

D. 估计总体中成绩落在$[60,70)$内的学生人数为150

5. 2020年，新型冠状病毒引发的疫情牵动着亿万人的心. 八方驰援战疫情，众志成城克时难，社会各界支援湖北，共抗新型冠状病毒肺炎. 郑州某医院的甲、乙、丙、丁、戊5名医生到湖北的A、B、C三个城市支援，若要求每个城市至少安排1名医生，则A城市恰好只有医生甲去支援的概率为

A. $\frac{1}{15}$　　B. $\frac{7}{75}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{1}{2}$

6. 一条斜率为1的直线分别与曲线$y=\ln x+1$和曲线$y=\sin x(-\pi<x<\pi)$相切于点A和点B，则公切线段AB的长为

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

7. 若$a=(1+\tan 20^\circ)(1+\tan 21^\circ)$，$b=(1+\tan 24^\circ)(1+\tan 25^\circ)$，则下列结论不正确的是

A. $a<b$　　B. $ab=4$　　C. $a+b>4$　　D. $a^2+b^2=9$

8. 若$xe^x=1$，$\ln y-\frac{e}{y}=1$，则$xy=$

A. 3　　B. e　　C. $\frac{1}{e}$　　D. 1

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(3,0)$，过点$F$的直线交椭圆$E$于$A$，$B$两点. 若$AB$的中点坐标为$(1,-1)$，则

A. 直线AB的方程为$y=\frac{1}{2}(x-3)$　　B. $a^2=2b^2$

C. 椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$　　D. 椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 函数$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再将所得图象上所有点的横坐标变为原来的2倍，纵坐标不变，得到函数$f(x)$的图象. 若对于任意$x_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，都存在$x_2\in[0,1]$，使得$f(x_1+\theta)+x_2=1$，则$\theta$的可能值为

A. π　　B. $\frac{7}{6}\pi$　　C. $\frac{3}{2}\pi$　　D. $\frac{4}{3}\pi$

11. 下列说法正确的有

A. 设直线系M：$(x-2)\cos\theta+y\sin\theta=1(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，则存在一个圆与$M$中所有直线相交

B. 设直线系M：$(x-2)\cos\theta+y\sin\theta=1(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，则存在一个圆与$M$中所有直线相切

C. 如果圆C：$x^2+y^2-2\sqrt{2}ax-2\sqrt{2}ay+2a^2+4=0$与圆$O$：$x^2+y^2=4$有四条公切线，则实数$a$的取值范围是$a>\sqrt{2}$

D. 过点$(6,8)$作圆O'：$x^2+y^2=a$的切线，切点为A，B，若直线AB的方程为$3x+4y-2=0$，则$a=2$

12. 已知函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|-\sin 2x-1$，则下列说法正确的是

A. $f(x)$是以 π 为周期的函数

B. 直线 $x=\frac{\pi}{2}$是曲线 $y=f(x)$的对称轴

C. 函数 $f(x)$的最大值为$\sqrt{2}$，最小值为$\sqrt{2}-2$

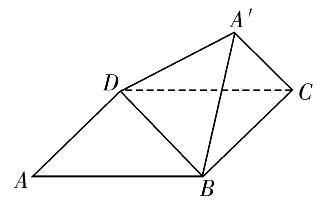
D. 若函数 $f(x)$在区间$(0,M\pi)$上恰有 2023 个零点，则$\frac{2023}{2}<M\leqslant 1012$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 $z=3+4\mathrm{i}$，i 为虚数单位，则复数 $z-|z|+(1-\mathrm{i})$在复平面内对应的点的坐标为________.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(4,2)$，若非零向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角都相等，则 $\boldsymbol{c}$ 的坐标为________.（写出一个符合要求的答案即可）

15. 如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$AB=3$，$AD=2$，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，现将$\triangle ABD$ 沿直线 BD 翻折，得到三棱锥 $A'\text{-}BCD$，若 $A'C=\sqrt{7}$，则三棱锥 $A'\text{-}BCD$ 的内切球表面积为____________.



16. 已知数表如图，记第 m 行，第 n 列的数为 $a_{(m,n)}$，如 $a_{(4,2)}=8$，记 $M=a_{(2023,1)}+a_{(2023,2)}+\cdots+a_{(2023,2023)}$，则 $\log_2\left(\frac{M}{2023}-1010\right)=$____________.

$$
\begin{array}{c}
0 \\
1\quad 2 \\
3\quad 4\quad 5\quad 6 \\
7\quad 8\quad 9\quad 10\quad 11\quad 12\quad 13\quad 14 \\
15\quad 16\quad 17\quad 18\quad 19\quad 20\quad 21\quad \cdots\quad \cdots 30 \\
\cdots\cdots
\end{array}
$$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_2=4$，$2a_4-a_5=7$，公比不为-1 的等比数列$\{b_n\}$满足 $b_3=4$，$b_4+b_5=8(b_1+b_2)$.

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)设 $c_n=\frac{3}{a_na_{n+1}}+b_n$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 S_n.

18.(本小题满分 12 分)

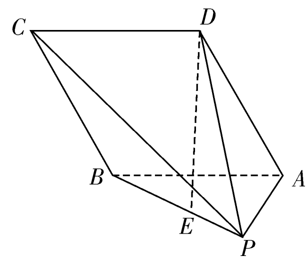
已知$\triangle ABC$的内角A,B,C对应的边分别为a,b,c,$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{a^2-3b^2}{4}\sin C$.

(1)求证:$\sin A=3\sin B$;

(2)点D在边BC上,若$DC=DA=\dfrac{1}{3}BC$,求$\cos A$.

19.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥$P-ABCD$中,底面$ABCD$是边长为 4 的菱形,$\angle PAB=\angle DAB=\dfrac{\pi}{3}$,$PA\perp PB$,点$E$在线段$PB$上,$CD\perp DE$,平面$PAB\perp$平面$ABCD$.



(1)求四面体$E-PAD$的体积;

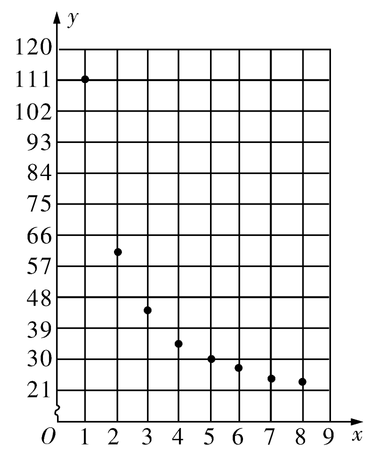
(2)求直线DE与平面CDP所成角的正弦值.

20.(本小题满分 12 分)

某企业新研发了一种产品,产品的成本由原料成本及非原料成本组成.每件产品的非原料成本y(单位:元)与生产该产品的数量x(单位:千件)有关,经统计得到如下数据:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	112	61	44.5	35	30.5	28	25	24

根据以上数据,绘制了散点图.



观察散点图,两个变量不具有线性相关关系,现考虑用反比例函数模型$y=a+\dfrac{b}{x}$和指数函数模型$y=ce^{dx}$分别对两个变量的关系进行拟合.已求得用指数函数模型拟合的经验回归方程为$\hat{y}=96.54e^{-0.2x}$,$\ln y$与x的相关系数$r_1=-0.94$.

参考数据(其中$u_i=\dfrac{1}{x_i}$):

$\sum\limits_{i=1}^{8}u_iy_i$	$\bar{u}$	$\bar{u}^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}u_i^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}y_i$	$\sum\limits_{i=1}^{8}y_i^2$	$\sqrt{0.61\times6185.5}$	e^{-2}
183.4	0.34	0.115	1.53	360	22385.5	61.4	0.135

(1)用反比例函数模型求y关于x的经验回归方程;

(2)用相关系数判断上述两个模型哪一个拟合效果更好(精确到0.01),并用其估计产量为 10 千件时每件产品的非原料成本;

(3) 该企业采取订单生产模式(根据订单数量进行生产,即产品全部售出). 根据市场调研数据,若该产品单价定为100元,则签订9千件订单的概率为0.8,签订10千件订单的概率为0.2;若单价定为90元,则签订10千件订单的概率为0.3,签订11千件订单的概率为0.7. 已知每件产品的原料成本为10元,根据(2)的结果,企业要想获得更高利润,产品单价应选择100元还是90元,请说明理由.

参考公式:对于一组数据$(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$,其经验回归直线$\hat{v}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}u$的斜率和截距的最小二乘估计分别为:$\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}$,$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$,相关系数$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}v_i^2-n\bar{v}^2\right)}}$.

21.(本小题满分12分)

已知$P(2,0)$是椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点,过点$D(1,0)$且斜率为$k(k<0)$的直线$l$与椭圆$C$相交于$A,B$两点(点$A$在$x$轴的上方),直线$PA,PB$分别与直线$x=1$相交于$M,N$两点. 当点$A$为椭圆$C$的上顶点时,$k=-1$.

(1)求椭圆C的方程;

(2)若$|MN|=\lambda$,且$\lambda\in[2,3]$,求实数k的取值范围.

22.(本小题满分12分)

已知函数$f(x)=(2-x)e^x-ax-2$.

(1)若$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减,求实数a的取值范围;

(2)当$0\leqslant a<1$时,求证:$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上只有一个零点x_0,且$x_0<\dfrac{e}{a+1}$.