郑州市 2022—2023 学年下期期末考试

高二数学试题卷

注意事项：

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.考试时间 120 分钟，满分 150 分.考生应首先阅读答题卡上的文字信息，然后在答题卡上作答，在试题卷上作答无效.交卷时只交答题卡.

第Ⅰ卷 (选择题，共 60 分)

一 、单选题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题所给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

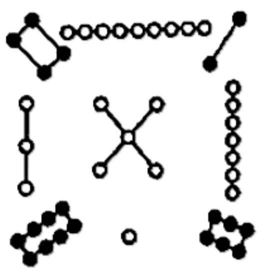
1. 已知数列$\{a_n\}$，满足 $a_n-a_{n-1}=2$，$a_1=0$，则 $a_{10}=$

A. 18　　B. 36　　C. 72　　D. 144

2. 2023 年 5 月 10 日，第七届全球跨境电子商务大会在郑州举行，小郑同学购买了几件商品，这些商品的价格如果按美元计，则平均数为 30，方差为 60，如果按人民币计(汇率按 1 美元=7 元人民币)，则平均数和方差分别为

A. 30，60　　B. 30，420　　C. 210，420　　D. 210，2940

3. 如图，洛书古称龟书，是阴阳五行术数之源.在古代传说中有神龟出于洛水，其甲壳上有此图像，结构是戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足，以五居中，五方白圈皆阳数，四角黑点为阴数.若从四个阴数和五个阳数中随机选取 4 个数，则选取的 4 个数之和为奇数的方法数为



A. 60

B. 61

C. 65

D. 66

4. 下列四个命题中，正确命题的个数为

①甲乙两组数据分别为：甲：28，31，39，42，45，55，57，58，66；乙：29，34，35，48，42，46，55，53，55，67.则甲乙的中位数分别为 45 和 44.

②相关系数 $r=-0.89$，表明两个变量的相关性较弱.

③若由一个 2×2 列联表中的数据计算得 K^2 的观测值 $k\approx7.103$，那么有 99%的把握认为两个变量有关.

④用最小二乘法求出一组数据 $(x_i,\ y_i)$，$(i=1,\cdots,n)$ 的回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 后要进行残差分析，相应于数据 $(x_i,\ y_i)$，$(i=1,\cdots,n)$ 的残差是指 $\hat{e}_i=y_i-(\hat{b}x_i+\hat{a})$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 已知 $(x-1)^n$ 的二项展开式中二项式系数和为 64，若 $(x-1)^n=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_n(x+1)^n$，则 a_1 等于

A. 192　　B. 448　　C. -192　　D. -448

6. 已知函数 $f(x)=ax^2-\ln x$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $y=3x$ 平行，则该切线的方程为

A. $x-3y+5=0$　　B. $3x-y-1=0$

C. $3x-y+1=0$　　D. $x-3y+1=0$

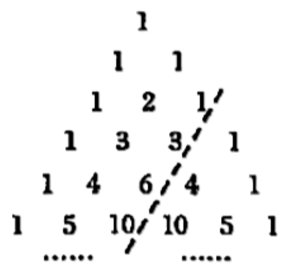
7. “杨辉三角”是中国古代重要的数学成就，它比西方的“帕斯卡三角形”早了 300 多年. 如图所示的是由“杨辉三角”拓展而成的三角形数阵，图中虚线上的数 1,3,6,10,…构成数列 $\{a_n\}$，记 a_n 为该数列的第 n 项，则 $a_{64}=$

A. 2016

B. 2080

C. 4032

D. 4160



8. 下列说法中**不正确**的是

A. 若随机变量 $X\sim N(1,\sigma^2)$，$P(X<4)=0.79$，则 $P(X<-2)=0.21$

B. 若随机变量 $X\sim B(10,\frac{1}{3})$，则期望 $E(X)=\frac{10}{3}$

C. 已知随机变量 X 的分布列为 $P(X=i)=\frac{a}{i(i+1)}(i=1,2,3)$，则 $P(X=2)=\frac{2}{3}$

D. 从 3 名男生，2 名女生中选取 2 人，则其中至少有一名女生的概率为 $\frac{7}{10}$

9. 若需要刻画预报变量 Y 和解释变量 x 的相关关系，且从已知数据中知道预报变量 Y 随着解释变量 x 的增大而减小，并且随着解释变量 x 的增大，预报变量 Y 大致趋于一个确定的值，为拟合 Y 和 x 之间的关系，应使用以下回归方程中的($b>0$, e 为自然对数的底数)

A. $Y=bx+a$ B. $Y=-b\ln x+a$

C. $Y=b\sqrt{x}+a$ D. $Y=be^{-x}+a$

10. 对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$，现给出定义：设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导数，$f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导数，若方程 $f''(x)$ 有实数解 x_0，则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$ 的"拐点". 经过探究发现：任何一个三次函数都有"拐点"，任何一个三次函数都有对称中心，且"拐点"就是对称中心. 设函数 $g(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{5}{3}$，则 $g\left(\frac{1}{9}\right)+g\left(\frac{2}{9}\right)+g\left(\frac{3}{9}\right)+\cdots+g\left(\frac{17}{9}\right)=$

A. $\frac{17}{3}$ B. $\frac{17}{2}$ C. 17 D. 34

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\begin{cases}(\frac{1}{2}-a)n+2,\ n>7\\ a^{n-6},\ n\leqslant7,\end{cases}$ $(n\in N^*)$，若对于任意 $n\in N^*$ 都有 $a_n>a_{n+1}$，则实数 a 的取值范围是

A. $(\frac{1}{2},1)$ B. $(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$ C. $(\frac{2}{3},1)$ D. $(1,\frac{2}{3})$

12. 若 $\ln b+b=a\ln a+a^2$，则下列式子可能成立的是

A. $a>b>1$ B. $a>1>b$ C. $b>1>a$ D. $1>b>a$

第Ⅱ卷(非选择题，共 90 分)

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=8$, $a_9=\frac{1}{32}$, $a_2a_3<0$，则公比 $q=$________.

14. 在甲，乙，丙三个地区爆发了流感，这三个地区分别有 7%，6%，5% 的人患了流感. 若这三个地区的人口数的比为 5∶3∶2，现从这三个地区中任意选取一个人，这个人患流感的概率是________.

15. 为积极践行劳动教育理念，扎实开展劳动教育活动，某学校开设三门劳动实践选修课，现有五位同学参加劳动实践选修课的学习，每位同学仅报一门，每门至少有一位同学参加，则不同的报名方法有________.

16. 2023 年第 57 届世界乒乓球锦标赛在南非德班拉开帷幕，参赛选手甲、乙进入了半决赛，半决赛采用五局三胜制，当选手甲、乙两位中有一位赢得三局比赛时，就由该选手晋级而比赛结束. 每局比赛皆须分出胜负，且每局比赛的胜负不受之前比赛结果影响. 假设甲在任一局赢球的概率为 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$，比赛局数的期望值记为 $f(p)$，则 $f(p)$ 的最大值是________.

三、解答题：共 70 分. 解答题应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

17.（10 分）

一只口袋中装有形状、大小都相同的 10 个小球，其中有红球 1 个，白球 4 个，黑球 5 个.

（Ⅰ）若每次从袋子中随机摸出 1 个球，摸出的球不再放回. 在第 1 次摸到白球的条件下，第 2 次摸到白球的概率；

（Ⅱ）若从袋子中一次性随机摸出 3 个球，记黑球的个数为 X，求随机变量 X 的概率分布.

18.（12 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=2, S_{n+1}=4a_n+2$.

（Ⅰ）设 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，证明：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

（Ⅱ）求数列 $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（12 分）

黄河是中华民族的母亲河、生命河，也是一条桀骜难驯的忧患之河. 小浪底水利枢纽工程位于河南省济源市、洛阳市孟津区边界，是黄河治理开发的关键控制性工程. 它控制着黄河 92% 的流域面积、91% 的径流量和近 100% 的泥沙，以防洪、防凌、减淤为主，兼顾供水、灌溉、发电，不仅是中华民族治黄史上的丰

碑，也是世界水利工程史上最具标志性的杰作之一．其大坝为预测渗压值和控制库水位，工程师在水库选取一支编号为 HN1 渗压计，随机收集 10 个该渗压计管内水位和水库水位监测数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
水库水位 x_i/m	75.69	75.74	75.77	75.78	75.81	75.85	75.67	75.87	75.9	75.93	758.01
HN1 渗压计管内水位 y_i/m	72.88	72.90	72.92	72.92	72.93	72.94	72.94	72.95	72.96	72.98	729.32

并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2=57457.98$，$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i^2=53190.77$，$\sum\limits_{i=1}^{10}x_iy_i=55283.20$，$72.932^2=5319.076624$，$75.801^2=5745.791601$，$\sqrt{240.6}\approx15.51$.

（Ⅰ）求该水库 HN1 号渗压计管内水位与水库水位的样本相关系数（精确到 0.01）；

（Ⅱ）某天雨后工程师测量了水库水位，并得到水库的水位为 76 m．利用以上数据给出此时 HN1 号渗压计管内水位的估计值．

附：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，

$\hat{y}=\hat{b}\bar{x}+\hat{a}$.

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

21.(12分)

根据长期生产经验，某种零件的一条生产线在设备正常状态下，生产的产品正品率为0.985. 为了监控该生产线生产过程，检验员每天从该生产线上随机抽取10个零件，并测量其质量，规定：抽检的10件产品中，若至少出现2件次品，则认为设备出现了异常情况，需对设备进行检测及修理.

(Ⅰ)假设设备正常状态，记 X 表示一天内抽取的10件产品中的次品件数，求 $P(X\geqslant 2)$，并说明上述监控生产过程规定的合理性；

(Ⅱ)该设备由甲、乙两个部件构成，若两个部件同时出现故障，则设备停止运转；若只有一个部件出现故障，则设备出现异常. 已知设备出现异常是由甲部件故障造成的概率为 p，由乙部件故障造成的概率为 $1-p$. 若设备出现异常，需先检测其中一个部件，如果确认该部件出现故障，则进行修理，否则，继续对另一部件进行检测及修理. 已知甲部件的检测费用2 000元，修理费用6 000元，乙部件的检测费用3 000元，修理费用4 000元. 当设备出现异常时，仅考虑检测和修理总费用，应先检测甲部件还是乙部件，请说明理由.

参考数据：$0.985^{10}\approx 0.86$，$0.985^{9}\approx 0.87$，$0.985^{8}\approx 0.89$.

22.(12分)

已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

(Ⅰ)求函数 $f(x)$ 的最小值；

(Ⅱ)设函数 $g(x)=f(x)-\dfrac{ax^2+x-a}{x^2}$. 证明：当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，$\forall x\in\left(0,\dfrac{a}{1-a}\right)$，$g(x)>0$ 恒成立.