巢湖一中 合肥八中 淮南二中 六安一中 南陵中学 舒城中
滁州中学 池州一中 阜阳一中 灵璧中学 宿城一中 合肥六

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。满

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

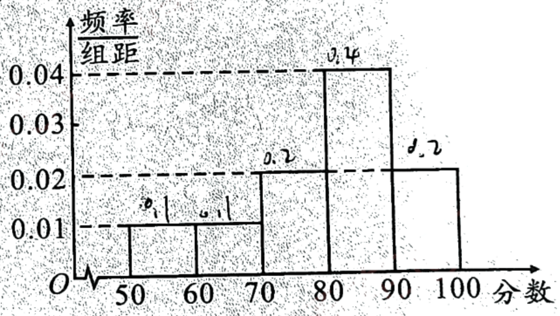
一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{1}{4}\leqslant 2^x\leqslant 4\right.\right\}$，$B=\{x|-4\leqslant x<-1\}$，则 $A\cap B=$（ B ）

$-2\leqslant x\leqslant 2$

A. $[-4,2]$　　B. $[-2,-1)$　　C. $(-1,2]$　　D. $[-2,-1]$

2. 疫情期间，部分小区实行封控管理，志愿者的服务态度成为了影响居民生活质量的重要因素之一，因此对志愿者的管理也成为疫情期间必不可少的环节之一. 为了解志愿者服务的相关情况，调研人员现要求A小区居民对志愿者的服务态度进行打分，所得分数统计如下图所示，据此可以估计，A小区志愿者服务态度的平均分为（ C ）



A. 85　　B. 82.5　　C. 80　　D. 75

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(1,4)$，$\boldsymbol{c}=(\lambda,-2)$，若 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=5$，则实数 $\lambda=$（ D ）

A. 1或−4　　B. −1或4　　C. 0或8　　D. 0或−8

4. 已知 $a=2^{0.3}$，$b=\log_3 2.8$，$c=\log_9 7.8$，则 a，b，c 的大小关系为（ C ）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $b>c>a$　　D. $c>b>a$

5. 已知圆锥的母线长为10，侧面展开图的圆心角为 $\frac{4\pi}{5}$，则该圆锥的体积为（ D ）

试题

舒城中学　太湖中学　天长中学　屯溪一中　宣城中学
合肥六中　太和中学　合肥七中　科大附中　野寨中学

。满分150分，考试时间120分钟。请在答题卷上作答。

A. $\dfrac{62\sqrt{21}}{3}\pi$　　B. $32\sqrt{6}\pi$　　C. $16\sqrt{6}\pi$　　D. $\dfrac{32\sqrt{21}}{3}\pi$

6. 若直线 $y=ax-1$ 是曲线 $f(x)=x+\ln x$ 在某点处的切线，则实数 $a=$（ C ）

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

7. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且 $f(x+1)$ 为奇函数，若函数 $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2-2x+2}-x+1\right)$ 与函数 $f(x)$ 图象有5个交点，其横坐标从左到右依次为 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5，则 $\sum\limits_{i=1}^{5}x_i=$（ B ）

A. 0　　B. 5　　C. 6　　D. 10

8. 已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 是 E 右支上一点，$\angle F_1PF_2=120^\circ$，O 是坐标原点，$\angle POF_1=120^\circ$，则 E 的离心率为（ A ）

A. $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$　　B. $3\sqrt{2}+\sqrt{10}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$　　D. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$

二、选择题（本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.）

9. 若复数 $z_1=1+2\mathrm{i}$，$z_2=7-3\mathrm{i}$，则下列说法正确的是（ABC

A. $|z_1|=\sqrt{5}$

B. 在复平面内，复数 z_2 所对应的点位于第四象限

C. $z_1\cdot z_2$ 的实部为13

D. $z_1\cdot z_2$ 的虚部为 -11

10. 若经过点 $P(1,3)$ 的直线与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 恒有公共点，则 C 的准线可能是（ B ）

A. $x=-2$　B. $x=-3$　C. $x=-\sqrt{2}$　D. $x=-2\sqrt{2}$

11. 已知函数 $f(x)=-4\cos x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1$，则下列说法正确的是

(BC)

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ ×

B. $x=\dfrac{5\pi}{6}$ 为函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴

C. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{19\pi}{12}\right]$ 上单调递减

D. 函数 $y=f(x)+\dfrac{3}{2}$ 在 $[0,\pi]$ 上有3个零点

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，过棱 AB,BC 的中点 E，F 作正方体的截面，下列说法正确的是（　）

A. 该正方体外接球的表面积是 48π ×

B. 若截面是正六边形，则直线 B_1D 与截面垂直

C. 若截面是正六边形，则直线 D_1B 与截面所成角的正弦值为 $\dfrac{2}{3}$

D. 若截面过 D_1 点，则截面周长为 $2\sqrt{13}+\sqrt{2}$

第 II 卷（非选择题　共 90 分）

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 已知直线 $l:y=kx(k>0)$ 与圆 $M:\left(x-\dfrac{8}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{16}{9}$ 相切，则实数 $k=$ ____$\pm\frac{1}{2}$____.

14. 若 $(ax-y)(x+y)^6$ 的展开式中 x^5y^2 的系数为9，则实数 $a=$ ____1____.

15. 数字中暗藏着一些潜在的规律，古希腊毕达哥拉斯学派通过石子的排列发现了三角形数、正方形数等；有时将数字进行拆分后也能够发现新的规律，现将一组数据拆分如下：

$\dfrac{1}{1}$,

$\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{1}$,

$\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{2},\dfrac{3}{1}$,

$\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{1}$,

……

观察可知，这组数据中的第 8 个数为 $\frac{2}{3}$，则 $\frac{3}{98}$ 是该组数据的第 47586 个数.

16. 若不等式 $\lambda e^{x}+\ln\lambda\geqslant\ln x$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则正数 λ 的取值范围为________.

四、解答题（本题共 6 小题，第 17 题 10 分，第 18~22 题每题 12 分，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．）

17.（本小题满分 10 分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $c\cos B+(b-2a)\cos C=0$.

（1）求 C；　$\frac{\pi}{3}$

（2）若 $b=3a$，求 $\cos B$.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_1=3$，且 $2S_nS_{n+1}+2(n+1)a_{n+1}=S_n+S_{n+1}$.

（1）求证：数列 $\left\{\frac{2n+1}{S_n}\right\}$ 为等差数列；

（2）若 $b_n=\frac{2n+1}{S_n}\cdot 2^n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（本小题满分 12 分）

某大型国有企业计划在某双一流大学进行招聘面试，面试共分两轮，且第一轮通过后才能进入第二轮面试，两轮均通过方可录用．甲、乙、丙、丁 4 名同学参加面试，已知这 4 人面试第一轮通过的概率分别为 $\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{3}{4},\frac{3}{4}$，面试第二轮通过的概率分别为 $\frac{1}{2},\frac{5}{12},\frac{4}{9},\frac{2}{3}$，且 4 人的面试结果相互独立．

（1）求甲、乙、丙、丁 4 人中至少有 1 人被录用的概率；

（2）记甲、乙、丙、丁 4 人中最终被录用的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望．

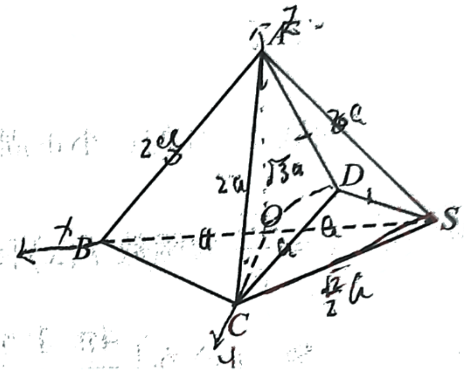
四

20.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为梯形，$AB // CD$，$AB=2CD$，$AD=SD$，$\triangle ABS$ 为正三角形，$SC \perp BC$，$CB=CS$，O 为 SB 的中点.

（1）求证：$OC \perp$ 平面 SAB；

（2）求二面角 $C-SA-D$ 的余弦值.



$\frac{1}{7}$

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，P,Q 分别为右顶点和上顶点，O 为坐标原点，$\dfrac{|FP|}{|OF|}+\dfrac{|FP|}{|OP|}=3e$（$e$ 为椭圆的离心率），ΔOPQ 的面积为 $\sqrt{3}$.

（1）求 E 的方程；

（2）设四边形 $ABCD$ 是椭圆 E 的内接四边形，直线 AB 与 CD 的倾斜角互补，且交于点 $(3,0)$，求证：直线 AC 与 BD 交于定点.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x-2)e^{-x}$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 a,b 为两个不相等的实数，且满足 $ae^{b}-be^{a}=2(e^{b}-e^{a})$，求证：$a+b>6$.

1号卷·A10联盟2023届高三开年考

数学参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	D	A	D	C	B	A

1. B　由题意得，$A=[-2,2]$，$B=[-4,-1]$，$\therefore A\cap B=[-2,-1]$. 故选 B.

2. C　由题意得，所求平均分为 $55\times0.1+65\times0.1+75\times0.2+85\times0.4+95\times0.2=80$. 故选 C.

3. D　由题意得，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(2,-3)+2(1,4)+(\lambda,-2)=(4+\lambda,3)$，

$\therefore|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{(4+\lambda)^2+3^2}=5$，解得 $\lambda=0$ 或 -8. 故选 D.

4. A　由题意得，$a=2^{0.3}>1$，$1=\log_3 3>b=\log_3 2.8=\log_9 7.84>c=\log_9 7.8$，$\therefore a>b>c$. 故选 A.

5. D　记圆锥的底面半径为 r，则 $\frac{4\pi}{5}\times10=2\pi r$，解得 $r=4$，$\therefore$ 圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=2\sqrt{21}$，$\therefore$ 该圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\times\pi\times16\times2\sqrt{21}=\frac{32\sqrt{21}}{3}\pi$. 故选 D.

6. C　设切点为 $A(m,n)$，由 $f(x)=x+\ln x$，得 $f'(x)=1+\frac{1}{x}$，则 $f'(m)=1+\frac{1}{m}=a$ ①，

又 $\begin{cases}n=am-1\\n=m+\ln m\end{cases}$，联立①可得，$\begin{cases}m=n=1\\a=2\end{cases}$. 故选 C.

7. B　$\because f(x+1)$ 为奇函数，$\therefore f(x+1)=-f(-x+1)$，$\therefore f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，对于函数 $h(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$，有 $h(-x)+h(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$，$\therefore$ 函数 $h(x)$ 为奇函数，其图象关于原点对称，$\therefore$ 函数 $g(x)=h(x-1)=\ln\left[\sqrt{(x-1)^2+1}-(x-1)\right]$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，$\therefore x_1+x_5=2$，$x_2+x_4=2$，$x_3=1$，$\therefore\sum_{i=1}^{5}x_i=5$. 故选 B.

8. A　$\because\angle OF_1P=\angle PF_1F_2$，$\angle F_1OP=\angle F_1PF_2$，$\triangle OF_1P\backsim\triangle PF_1F_2$，$\therefore\frac{|OF_1|}{|PF_1|}=\frac{|PF_1|}{|F_1F_2|}$，

$\therefore|PF_1|=\sqrt{2}c$. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2$，

即 $4c^2=2c^2+|PF_2|^2-2\sqrt{2}c|PF_2|\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，解得 $|PF_2|=\frac{\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)c}{2}$，又 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，

$\therefore\sqrt{2}c-\frac{\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)c}{2}=2a$，解得 $\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$，即 E 的离心率为 $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$. 故选 A.

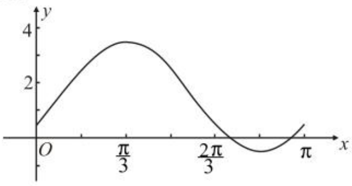
二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

题号	9	10	11	12
答案	ABC	BD	BC	BD

9. ABC　由题意得，$|z_1|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，故 A 正确；在复平面内，复数 z_2 所对应的点为 $(7,-3)$，位于第四象限，故 B 正确；$\because z_1\cdot z_2=(1+2\mathrm{i})(7-3\mathrm{i})=7-3\mathrm{i}+14\mathrm{i}+6=13+11\mathrm{i}$，$\therefore z_1\cdot z_2$ 的实部为 13，虚部为 11，故 C 正确，D 错误. 故选 ABC.

10. BD　由题意得，点 $P(1,3)$ 在抛物线上或其内部，则 $\sqrt{2p}\geqslant 3$，解得 $p\geqslant\dfrac{9}{2}$，$\therefore$ 其准线为 $x=-\dfrac{p}{2}\leqslant-\dfrac{9}{4}$，故选 BD.

11. BC　由题意得，$f(x)=-4\cos x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1=-4\cos x\left(\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)+1=$
$2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 错误；
$f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-2$，故 B 正确；$\because x\in\left[\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{19\pi}{12}\right]$，$\therefore 2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{5\pi}{2},3\pi\right]$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{19\pi}{12}\right]$ 上单调递减，故 C 正确；作出函数 $y=f(x)+\dfrac{3}{2}$ 在 $[0,\pi]$ 上的大致图象如图所示，观察可知，有 2 个零点，故 D 错误. 故选 BC.



12. BD　对于 A，外接球的半径为 $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{4+4+4}=\sqrt{3}$，故外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=12\pi$，故 A 错误；对于 B，建立如图所示的空间直角坐标系，设 AA_1 的中点为 G，则 $D(0,0,0)$，$B_1(2,2,2)$，$E(2,1,0)$，$F(1,2,0)$，$G(2,0,1)$，$\therefore\overrightarrow{DB_1}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{EG}=(0,-1,1)$，$\therefore\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{EF}=-2+2+0=0$，$\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{EG}=0-2+2=0$，则 $\overrightarrow{DB_1}\perp\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{DB_1}\perp\overrightarrow{EG}$，即 $DB_1\perp EF$，$DB_1\perp EG$，又 $EF\cap EG=E$，$EG,EF\subset$ 正六边形截面，$\therefore DB_1\perp$ 正六边形截面，故 B 正确；对于 C，如图 1，易得 $\overrightarrow{D_1B}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{DB_1}=(2,2,2)$ 为正六边形截面的一个法向量，设直线 D_1B 与截面所成的角为 φ，则 $\sin\varphi=\left|\cos<\overrightarrow{D_1B},\overrightarrow{DB_1}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{DB_1}\right|}{\left|\overrightarrow{D_1B}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DB_1}\right|}=$
$\dfrac{|4+4-4|}{\sqrt{12}\times\sqrt{12}}=\dfrac{1}{3}$，故 C 错误；对于 D，如图 2，延长 EF，与 DA 的延长线交于点 K，与 DC 的延长线交于点 L，连接 D_1K 交 AA_1 于点 M，连接 D_1L 交 CC_1 于点 N，则截面 D_1MEFN 为平面 α. 因此有 $AK=AE=BE=BF=FC=CL=1$，M 为 AA_1 的三等分点，N 为 CC_1 的三等分点，于是 $DK=DL=3$. $\because ME=NF=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$，$D_1M=D_1N=\sqrt{2^2+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$，
$EF=\sqrt{2}$，故截面 D_1MEFN 的周长为 $2\times\dfrac{\sqrt{13}}{3}+\dfrac{2\sqrt{13}}{3}\times 2+\sqrt{2}=2\sqrt{13}+\sqrt{2}$，故 D 正确.
故选 BD.

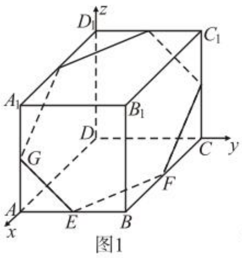


图1

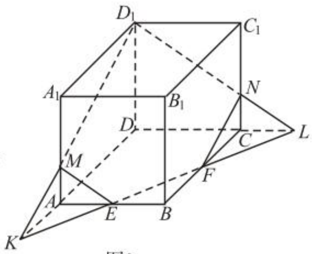


图2

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

由题意得，圆心坐标为$\left(\dfrac{8}{3},0\right)$，半径为$\dfrac{4}{3}$，则$\dfrac{\left|\dfrac{8}{3}k\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{4}{3}$. 解得$k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

14. 1

$(x+y)^6$展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_6^r\cdot x^{6-r}y^r$，令$r=1$或$r=2$，则$(ax-y)(x+y)^6$展开式中$x^5y^2$的系数为$C_6^2a-C_6^1=9$，解得$a=1$.

15. 4953

由题意得，前99行共有$\dfrac{(1+99)\times 99}{2}=4950$个数，故$\dfrac{3}{98}$是该组数据的第4953个数.

16. $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

不等式可化为$\lambda e^x+\ln\lambda+x\geqslant\ln x+x$对$\forall x\in(0,+\infty)$恒成立，$\therefore$有$\lambda e^x+\ln(\lambda e^x)\geqslant\ln x+x$，

令$f(x)=x+\ln x$，则原不等式可化为$f\left(\lambda e^x\right)\geqslant f(x)$，易得函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

$\therefore\lambda e^x\geqslant x$，即$\lambda\geqslant\dfrac{x}{e^x}$，令$g(x)=\dfrac{x}{e^x}(x>0)$，则$g'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，由$g'(x)>0$，得$0<x<1$；

由$g'(x)<0$，得$x>1$，$\therefore$函数$g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{e}$，$\therefore\lambda\geqslant\dfrac{1}{e}$.

四、解答题（本题共 6 小题，第 17 题 10 分，第 18~22 题每题 12 分，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 10 分）

（1）由$c\cos B+(b-2a)\cos C=0$，得$\sin C\cos B+\sin B\cos C-2\sin A\cos C=0$，…………2分

则$\sin(B+C)-2\sin A\cos C=0$，即$\sin A-2\sin A\cos C=0$. ……………………4分

$\because\sin A\neq 0$，$\therefore\cos C=\dfrac{1}{2}$，又$0<C<\pi$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………5分

（2）在$\triangle ABC$中，$C=\dfrac{\pi}{3}$，由余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab$，…………………6分

$\because b=3a$，$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2-ab}=\sqrt{7}a$，……………………8分

$\therefore\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1+7-9}{2\sqrt{7}}=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}$. ……………………10分

18.（本小题满分 12 分）

（1）证明：$\because 2S_nS_{n+1}+2(n+1)a_{n+1}=S_n+S_{n+1}$，

$\therefore 2S_nS_{n+1}+2(n+1)S_{n+1}-2(n+1)S_n=S_n+S_{n+1}$，

$\therefore 2S_nS_{n+1}+(2n+1)S_{n+1}=(2n+3)S_n$，……………………3 分

$\therefore 2+\dfrac{2n+1}{S_n}=\dfrac{2n+3}{S_{n+1}}$，即 $\dfrac{2n+3}{S_{n+1}}-\dfrac{2n+1}{S_n}=2$，……………………5 分

又 $\dfrac{3}{S_1}=1$，$\therefore$ 数列 $\left\{\dfrac{2n+1}{S_n}\right\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列．……………………6 分

（2）由（1）知，则 $\dfrac{2n+1}{S_n}=2n-1$，$\therefore b_n=(2n-1)\cdot 2^n$，……………………8 分

则 $T_n=1\times 2^1+3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n$，

$\therefore 2T_n=1\times 2^2+3\times 2^3+5\times 2^4+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n+1}$，

两式相减，可得 $-T_n=2\times 2^1+2\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+2\cdot 2^n-(2n-1)\cdot 2^{n+1}-2$

$$=\frac{4(1-2^n)}{1-2}-(2n-1)\cdot 2^{n+1}-2=(3-2n)\cdot 2^{n+1}-6，$$ ……………………11 分

故 $T_n=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6$．……………………12 分

19.（本小题满分 12 分）

（1）由题意得，甲被录用的概率为 $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$，乙被录用的概率为 $\dfrac{4}{5}\times\dfrac{5}{12}=\dfrac{1}{3}$，

丙被录用的概率为 $\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{3}$，丁被录用的概率为 $\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}$．……………………2 分

设甲、乙、丙、丁 4 人中至少有 1 人被录用为事件 M，

则 $P(M)=1-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{23}{27}$．……………………4 分

（2）由题意得，X 的所有可能取值为 0，1，2，3，4，

$\therefore P(X=0)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{27}$，$P(X=1)=C_3^1\times\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{2}+C_3^0\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{10}{27}$，

$P(X=2)=C_3^1\times\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{2}+C_3^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$，

$P(X=3)=C_3^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+C_3^3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^0\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{54}$，

$P(X=4)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{54}$，

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{4}{27}$	$\dfrac{10}{27}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{7}{54}$	$\dfrac{1}{54}$

……………………10 分

$\therefore E(X)=0\times\dfrac{4}{27}+1\times\dfrac{10}{27}+2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{7}{54}+4\times\dfrac{1}{54}=\dfrac{3}{2}$．……………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

（1）取 AS 的中点 E，连接 OE,ED，则 $OE\parallel AB$，$OE=\frac{1}{2}AB$.

$\because AB\parallel CD$，$AB=2CD$，$\therefore OE\parallel CD$ 且 $OE=CD$，$\therefore$ 四边形 $OCDE$ 为平行四边形，

$\therefore OC\parallel DE$．$\because AD=SD$，$\therefore DE\perp SA$，$\therefore OC\perp SA$，$\because CB=CS$，$\therefore OC\perp SB$，

又 $SA\cap SB=S$，$\therefore OC\perp$ 平面 SAB. …………5 分

（2）连接 AO，$\because\triangle SAB$ 为正三角形，$\therefore AO\perp SB$，

$\because OC\perp$ 平面 SAB，$OC\subset$ 平面 SBC，$\therefore$ 平面 $SAB\perp$ 平面 SBC，

又平面 $SAB\cap$ 平面 $SBC=SB$，$\therefore AO\perp$ 平面 SBC．

又 $OC\perp SB$，$\therefore OA,OS,OC$ 两两垂直，

以 O 为坐标原点，OC,OS,OA 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

设 $BC=SC=2$，则 $AB=SB=2\sqrt{2}$，$OA=\sqrt{6}$，$OC=\sqrt{2}$，

$\therefore A\left(0,0,\sqrt{6}\right)$，$C\left(\sqrt{2},0,0\right)$，$S\left(0,\sqrt{2},0\right)$，$D\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{AS}=\left(0,\sqrt{2},-\sqrt{6}\right)$，$\overrightarrow{SD}=\left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$\overrightarrow{CS}=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)$. ……………………8 分

设平面 SAD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AS}=\sqrt{2}y_1-\sqrt{6}z_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{SD}=\sqrt{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{\sqrt{6}}{2}z_1=0\end{cases}$，

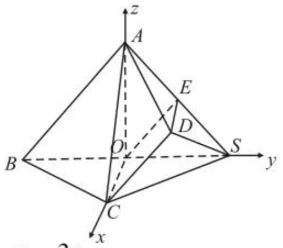
令 $z_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=\left(0,\sqrt{3},1\right)$. ……………………9 分

设平面 SAC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AS}=\sqrt{2}y_2-\sqrt{6}z_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CS}=-\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}y_2=0\end{cases}$，

令 $y_2=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{3},\sqrt{3},1\right)$，……………………10 分

则 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{2\times\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，……………………11 分

由图可知，二面角 $C-SA-D$ 为锐二面角，$\therefore$ 二面角 $C-SA-D$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.…………12 分



21.（本小题满分 12 分）

（1）$\because\frac{|FP|}{|OF|}+\frac{|FP|}{|OP|}=3e$，$\therefore\frac{a-c}{c}+\frac{a-c}{a}=\frac{3c}{a}$，$\therefore a=2c$，

又 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}ab=\sqrt{3}$，$a^2=b^2+c^2$，$\therefore a=2$，$b=\sqrt{3}$，……………………4 分

$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………5 分

（2）∵直线 AB 与 CD 的倾斜角互补，且交于点 $(3,0)$，∴直线 AB 与 CD 关于 x 轴对称，

∴ A 与 D，B 与 C 分别关于 x 轴对称.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $C(x_2,-y_2)$，$D(x_1,-y_1)$，

∴直线 AC 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_1-(-y_2)}{x_1-x_2}(x-x_1)$，直线 BD 的方程为 $y-y_2=\dfrac{-y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_2)$，

联立解得 $x=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}$，$y=0$，∴直线 AC 与 BD 交于点 $\left(\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2},0\right)$. ……………………8 分

设直线 AB 的方程为 $x=ty+3$，与椭圆 E 的方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 联立得 $(3t^2+4)y^2+18ty+15=0$，

由题意得，$\Delta=(18t)^2-60(3t^2+4)>0$，解得 $t^2>\dfrac{5}{3}$，

又 $y_1+y_2=-\dfrac{18t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{15}{3t^2+4}$，……………………10 分

∴ $\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\dfrac{(ty_1+3)y_2+(ty_2+3)y_1}{y_1+y_2}=\dfrac{2ty_1y_2}{y_1+y_2}+3=\dfrac{2t\cdot15}{-18t}+3=\dfrac{4}{3}$，

∴直线 AC 与 BD 交于定点 $\left(\dfrac{4}{3},0\right)$. ……………………12 分

22.（本小题满分 12 分）

（1）由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=\dfrac{3-x}{e^x}$，……………………1 分

∴当 $x\in(-\infty,3)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，……………………3 分

∴ $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,3)$，单调递减区间是 $(3,+\infty)$. ……………………4 分

（2）将 $ae^b-be^a=2(e^b-e^a)$ 两边同时除以 e^ae^b，得 $\dfrac{a}{e^a}-\dfrac{b}{e^b}=\dfrac{2}{e^a}-\dfrac{2}{e^b}$，

即 $\dfrac{a-2}{e^a}=\dfrac{b-2}{e^b}$，∴ $f(a)=f(b)$. …………………… 6分

由（1）知 $f(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递增，在 $(3,+\infty)$ 上单调递减，

又 $f(2)=0$，$f(3)=\dfrac{1}{e^3}$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f(x)>0$.

设 $a<b$，则 $2<a<3<b$，……………………7 分

令 $\varphi(x)=f(x)-f(6-x)(2<x<3)$，

则 $\varphi'(x)=f'(x)+f'(6-x)=\dfrac{3-x}{e^x}+\dfrac{3-(6-x)}{e^{6-x}}=(3-x)\cdot\dfrac{e^{6-x}-e^x}{e^6}$，

由 $x<3$，得 $6-x>x$，∴ $e^{6-x}>e^x$，∴ $\varphi'(x)>0$，∴ $\varphi(x)$ 在 $(2,3)$ 上单调递增. ………………9 分

又 $\varphi(3)=f(3)-f(3)=0$，∴ $\varphi(x)<0$，∴当 $2<x<3$ 时，$f(x)-f(6-x)<0$，

即 $f(a)-f(6-a)<0$，即 $f(a)<f(6-a)$，又 $f(a)=f(b)$，∴ $f(b)<f(6-a)$；……………11 分

又 $6-a>3$，$b>3$，$f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递减，∴ $b>6-a$，即 $a+b>6$. ………………12 分

以上各解答题如有不同解法并且正确，请按相应步骤给分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。